

Научная статья
УДК 551.345:536.5
EDN HMDNHU
DOI 10.17150/2713-1734.2026.8(2).246-255



А.В. Боровский
*Байкальский государственный университет,
г. Иркутск, Российская Федерация*

Р.И. Карымов
*Байкальский государственный университет,
г. Иркутск, Российская Федерация*

Математические методы исследования вечной мерзлоты

Аннотация. Работа посвящена математическим методам исследования теплового режима многолетнемерзлых пород. Рассматривается классическое уравнение теплопроводности с учётом фазовых переходов влаги, задача Стефана и условия на подвижной границе вода–лёд, где скачок теплового потока компенсирует скрытую теплоту плавления. Для стационарного случая обсуждается переход к уравнению Лапласа и расчёт геотермического градиента. Учёт природной гетерогенности среды требует стохастического обобщения: вводится случайное температурное поле, удовлетворяющее параболическому уравнению с аддитивным шумом, и на основе корреляционной теории выводятся уравнения для пространственной ковариационной функции. Особое внимание уделено интегральному представлению ковариации с экспоненциально убывающим ядром, предложенному японскими исследователями для описания пространственной изменчивости температуры поверхности грунта в криолитозоне Восточной Сибири. Приводятся примеры применения этих подходов к регионам сплошного распространения мерзлоты — Центральной Якутии и Чукотке, где российско-японские экспедиции собрали многолетние ряды наблюдений. Анализируется характерный масштаб пространственной корреляции температуры, определяемый типом растительности и микрорельефом. Статья иллюстрирует переход на границе вода–лёд схематическим графиком температурного профиля, демонстрирующим излом градиентов, обусловленный условием Стефана. Полученные результаты важны для прогнозирования реакции криолитозоны на климатические изменения и количественной оценки неопределённостей в моделях теплового баланса мерзлых толщ.

Ключевые слова. Уравнение теплопроводности, вечная мерзлота, ковариационная функция, Чукотка, Якутия.

Информация о статье. Дата поступления: 6 мая 2026; дата принятия к публикации: 15 мая 2026 г.; дата онлайн-размещения: 29 июня 2026 г.

Original article

A.V. Borovsky
*Baikal State University,
Irkutsk, Russian Federation*

R.I. Karymov
*Baikal State University,
Irkutsk, Russian Federation*

Mathematical Methods for Studying Permafrost

Abstract. The work is devoted to mathematical methods for studying the thermal regime of permafrost. It examines the classical heat equation accounting for phase transitions of moisture, the Stefan problem, and conditions at the moving water–ice

boundary, where the jump in heat flux compensates for the latent heat of fusion. For the stationary case, the transition to the Laplace equation and the calculation of the geothermal gradient are discussed. Accounting for natural heterogeneity of the medium requires a stochastic generalization: a random temperature field satisfying a parabolic equation with additive noise is introduced, and equations for the spatial covariance function are derived based on correlation theory. Particular attention is paid to the integral representation of the covariance with an exponentially decaying kernel, proposed by Japanese researchers to describe the spatial variability of ground surface temperature in the permafrost zone of Eastern Siberia. Examples of applying these approaches to continuous permafrost regions—Central Yakutia and Chukotka—are provided, where Russian Japanese expeditions have gathered long term observational series. The characteristic spatial correlation scale of temperature, determined by vegetation type and microrelief, is analyzed. The article illustrates the transition at the water–ice boundary with a schematic graph of the temperature profile, showing the break in gradients due to the Stefan condition. The obtained results are important for predicting the response of the permafrost zone to climatic changes and for quantifying uncertainties in heat balance models of frozen strata.

Keywords. Heat conduction equation, permafrost, covariance function, Chukotka, Yakutia.

Article info. Received 6 May, 2026; Accepted 15 May, 2026; Available online 29 June, 2026.

Введение

Многолетнемерзлые породы (вечная мерзлота) занимают около четверти площади суши Северного полушария и играют ключевую роль в климатической системе, углеродном цикле и устойчивости инженерных сооружений [1]. Потепление климата вызывает деградацию мерзлоты, что приводит к усилению эмиссии парниковых газов, активизации термокарстовых и оползневых процессов, а также к разрушению инфраструктуры [2]. Для количественного прогнозирования этих изменений необходимо детальное понимание физических механизмов теплопереноса в промерзающих и протаивающих грунтах. Математическое моделирование здесь становится основным инструментом, позволяющим воспроизводить наблюдаемые температурные поля и оценивать их будущую динамику [1; 2].

Классический подход опирается на уравнение теплопроводности и задачу Стефана, учитывающую фазовый переход воды в лёд [3]. Однако реальные природные среды крайне неоднородны: теплофизические свойства грунтов, влажность, мощность снежного и растительного покрова варьируют в пространстве случайным образом. Это требует стохастического обобщения детерминированных моделей, в рамках которого температура рассматривается как случайное поле, а её статистические характеристики — среднее, дисперсия и ковариация — находятся из уравнений, получаемых усреднением исходных физических законов. Важный вклад в развитие таких методов применительно к криолитозоне Восточной Сибири внесли совместные российско-японские исследования. В частности, японскими учёными было предложено интегральное выражение для пространственной ковариации температуры по-

верхности с ядром, экспоненциально убывающим с расстоянием, что позволило эффективно описывать реальные данные измерений в Якутии и на Чукотке.

Цель настоящей работы — систематически изложить математические методы исследования теплового состояния многолетнемерзлых пород, от классического уравнения теплопроводности и условий на границе раздела фаз до стохастической теории флуктуаций и интегральных представлений для ковариации температуры, с демонстрацией их применения на примере данных полевых наблюдений в Центральной Якутии и на Чукотском полуострове.

1. Классическое уравнение теплопроводности

Распространение тепла в грунтах криолитозоны описывается дифференциальным уравнением теплопроводности. В общей трёхмерной постановке оно имеет вид: [4]

$$\rho c \frac{\partial T}{\partial t} = \nabla * (\lambda \nabla T) + q_v, \quad (1)$$

где $T(r, t)$ — температура, ρ — плотность, c — удельная теплоёмкость, λ — коэффициент теплопроводности, q_v — мощность внутренних источников тепла. В случае однородной среды и отсутствия фазовых переходов уравнение сводится к классическому параболическому виду с постоянным коэффициентом теплопроводности $\alpha = \lambda / \rho c$. Для мёрзлых грунтов необходимо учитывать, что теплофизические характеристики λ и c сами зависят от температуры, особенно вблизи точки замерзания, что делает задачу существенно нелинейной. Однако в инженерных расчётах часто применяют квазилинейное приближение, вводя эффективную теплоёмкость, учитывающую фазовые переходы в некотором температурном интервале [1; 2].

2. Граничные условия на границе вода-лёд

Фазовый переход «вода-лёд» приводит к возникновению подвижной границы $\xi(t)$, на которой выполняется условие Стефана:

$$\lambda_1 \left. \frac{\partial T_1}{\partial z} \right|_{z=\xi} - \lambda_2 \left. \frac{\partial T_2}{\partial z} \right|_{z=\xi} = L p_2 W \frac{d\xi}{dt}, \quad (2)$$

где индексы 1 и 2 относятся к талой и мёрзлой зонам, L — скрытая теплота плавления льда, W — влажность грунта. Кроме того, на границе задано равенство температур. Граничные условия: $T_{1(\xi, t)} = T_{2(\xi, t)} = T_{1\{ph\}}$, обычно принимаемое равным 0°C . В реальных дисперсных грунтах из-за капиллярных и адсорбционных эффектов часть воды остаётся в жидком состоянии при отрицательных температурах. Поэтому часто используют обобщённое условие Стефана с

учёт содержания незамёрзшей воды, зависящей от температуры, что приводит к распределённому тепловыделению в некоторой области, а не на резкой границе [1].

В средах с фрактальной структурой и аномальной диффузией классическое условие Стефана обобщается путём замены целочисленных производных по времени и координате на дробные производные. Это позволяет учесть эффекты памяти и пространственные корреляции, характерные для неоднородных мёрзлых пород.

Наличие скрытой теплоты плавления приводит к тому, что на границе раздела талого и мерзлого грунта происходит илом температурного профиля. Это хорошо видно на графике зависимости температуры от глубины в периоды промерзания или оттаивания. (рис. 1 и 2).

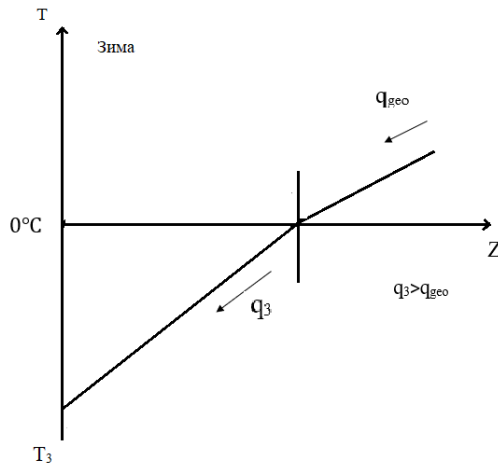


Рис. 1. График граничных условий перехода фазы зима

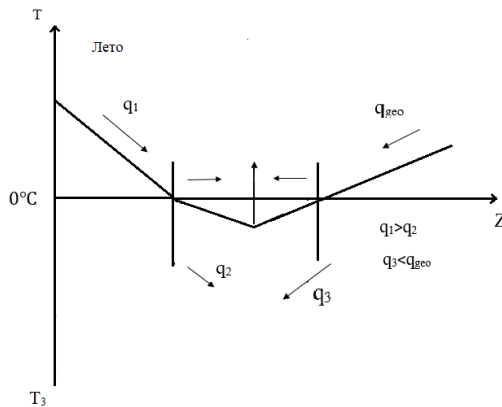


Рис. 2. График граничных условий перехода фазы лето

Разница наклонов отражает скачок теплового потока, необходимый для выделения или поглощения скрытой теплоты. При промерзании задний фронт мерзлоты движется вправо, при оттаивании — влево.

Описание границы фазового перехода лёд—вода для реальных мерзлотных пород сопряжено со значительными сложностями. Классическое приближение плоского фазового фронта, лежащее в основе традиционной задачи Стефана, не выполняется в капиллярных средах, такие как песок, супесь и суглинки. Еще более проблематично его применение во фрактальных средах — торфе, мхе, перегное и чернозёмах. Для учёта нелокальности и эффектов памяти, характерных для фрактальных структур, были предложены подходы на основе дробных производных. Однако эти подходы требуют дополнительных теоретических и экспериментальных исследований, а также тщательной верификации на натурных данных. Перспективным направлением является применение стохастических моделей сложных систем, учитывающих фрактальную природу пористых сред [5; 6].

3. Уравнение Лапласа и поток тепла

В стационарных условиях, когда $\frac{\partial T}{\partial t} = 0$, и при постоянстве теплофизических свойств уравнение теплопроводности переходит в уравнение Лапласа: [4; 7; 8]

$$\Delta T = 0. \quad (3)$$

Тепловой поток определяется законом Фурье $q = -\lambda \nabla T$. В одномерном случае для оценки глубины залегания кровли многолетнемёрзлых пород часто используют решение уравнения Лапласа в слое: задавая на поверхности температуру $T_s = T_0 + A \sin(\omega t + \varphi)$ а на нижней границе мерзлоты — постоянный геотермический поток q_{geo} , получают стационарный вертикальный профиль, положение нулевой изотермы и мощность мерзлоты.

В стационарных условиях, характерных для термодинамических параметров внутри земной коры (за исключением периодов землетрясений и вулканических зон) геотермический поток не зависит от z . Поэтому

$$\frac{dT}{dz} = -\frac{Q}{\lambda(z)}, \quad T(0) = T_0, T^{(\infty)} = T^\infty, \quad T_0 < T^\infty.$$

Интегрируем:

$$T(z) = T_0 - Q \int_0^z \left(\frac{1}{\lambda(z)} \right) dz.$$

Нижняя граница мерзлоты z_1 находится из уравнения

$$273,15K = T_0 - Q \int_0^{z_1} \left(\frac{1}{\lambda(z)} \right) dz .$$

Однако, в термодинамической модели вблизи 273,15 К нужно учитывать фазовые переходы лёд-вода.

4. Теория флуктуаций для уравнения теплопроводности

Стохастическое описание температурного поля необходимо для учёта пространственных неоднородностей тепловых свойств, вариаций снежного покрова и микроклимата [3; 9]. Пусть температура удовлетворяет уравнению

$$\frac{\partial T}{\partial t} = a\Delta T + \eta(r, t), \quad (4)$$

где $\eta(r, t)$ — случайное поле с нулевым средним и известной корреляционной функцией. В рамках корреляционной теории выводят уравнения для моментов. Для пространственно-временной ковариации $K(r_1, t_1; r_2, t_2) = \langle T'(r_1, t_1)T'(r_2, t_2) \rangle$ (штрих обозначает отклонение от среднего) можно получить детерминированное уравнение в частных производных, которые в стационарном случае относятся к эллиптическому типу. Часто предполагается, что источник шума дельта-коррелирован по времени, а по пространству имеет некоторую корреляционную функцию $\Phi(|r_1 - r_2|)$, что значительно упрощает анализ.

Уравнение для ковариации температуры и его решение

В условиях статистической однородности и изотропии на горизонтальной плоскости пространственная ковариация температуры поверхности грунта $C(r) = \langle T(r_1)T(r_2) \rangle - \langle T \rangle^2$, где $r(|r_1 - r_2|)$, удовлетворяет уравнению, которое для частного случая экспоненциального затухания приводит к решению [10]

$$C(r) = \sigma_T^2 \exp\left(-\frac{r}{\ell_c}\right). \quad (5)$$

Эта форма была предложена и использована японскими учёными (Iijima, Niuyama и др.) при обработке данных полевых измерений температуры деятельного слоя в Восточной Сибири [11; 12; 10]. В их работах показано, что такое представление соответствует функции Грина стационарного стохастического уравнения теплопроводности с белым по пространству шумом и может быть выведено из спектрального разложения в рамках теории случайных полей. Параметр корреляции ℓ_c характеризует типичный размер

неоднородностей и для лиственничных лесов Центральной Якутии составляет порядка 60–150 м в зависимости от увлажнённости и мощности мохового покрова [10; 13].

5. Примеры Якутии и Чукотки

Якутия и Чукотка являются эталонными полигонами для верификации математических моделей теплового режима мерзлоты. Мощность многолетнемёрзлых пород в Центральной Якутии достигает 500 м и более; среднегодовая температура грунтов на глубине нулевых годовых амплитуд варьирует от -10 до -2 °С. Российско-японские экспедиции на стационарах «Спасская Падь» (около Якутска) и «Эльгээйи» позволили получить детальные данные по температуре, влажности и глубине сезонного протаивания [11; 12; 14]. В частности, данные 2005–2015 гг. показали, что на участках с моховым покровом мощность деятельного слоя на 20–30 см меньше, чем на оголённых площадках. Применение стохастической модели с ковариационным ядром позволило интерполировать точечные измерения на всю территорию с ошибкой не более 0,5 °С. На Чукотке пространственная изменчивость температуры грунтов ещё выше из-за сложного рельефа и влияния моря; характерный масштаб корреляции l_c здесь оказывается меньше — от 30 до 80 м. Эти результаты важны для регионального картирования мерзлотных условий и оценки рисков деградации мерзлоты при потеплении климата [7; 15; 13].

Заключение

Математический аппарат, объединяющий классическую термодинамику фазовых переходов и стохастическую теорию случайных полей, обеспечивает надёжную основу для прогноза эволюции криолитозоны. Интегральные представления ковариации с экспоненциальным ядром, развитые японскими исследователями, успешно применяются для интерполяции статистических данных и оценки неопределённостей. Дальнейшее развитие методов предполагает полный учёт трёхмерной неоднородности, совместной динамики тепла и влаги, а также ассимиляцию спутниковых измерений [2; 13].

Список использованной литературы

1. Belolipetskii V.M. A Numerical Model of the Seasonal Thawing of Permafrost in the Swamp-Lake Landscapes / V.M. Belolipetskii, S.N. Genova. — DOI 10.17516/1997-1397-2016-9-2-158-165. — EDN VXLCHN // Журнал Сибирского федерального университета. Серия: Математика и физика. — 2016. — Т. 9, № 2. — С. 158–165.
2. Вычислительная реализация смешанно-размерной модели теплообмена в системе «грунт–труба» в криолитозоне / В.И. Васильев, М.В. Васильева, Д.Я. Никифоров [и др.]. — DOI 10.31857/S0044466921120176. — EDN YWNFHJ // Журнал вычислительной математики и математической физики. — 2021. — Т. 61, № 12. — С. 2060–2073.

3. Anikin G.V. Method of Stochastic Prediction of Soil Temperatures with GET Systems / G.V. Anikin, K.A. Spasennikova // *Soil Mechanics and Foundation Engineering*. — 2017. — Vol. 54, no. 1. — P. 1–6.
4. Carslaw H.S. *Conduction of Heat in Solids* / H.S. Carslaw, J.C. Jaeger. — 2nd ed. — Oxford: Clarendon Press, 1959. — 510 p.
5. Balobaev V.T. The Maximum Effect of Deep Lakes on Temperature Profiles — Determination of the Geothermal Gradient / V.T. Balobaev, I.M. Kutasov, L.V. Eppelbaum // *Earth Sciences Research Journal*. — 2009. — Vol. 13, no. 1. — P. 54–63.
6. Головинский П.А. Математические модели и методы. Ч. 4. Стохастические модели сложных систем / П.А. Головинский. — Воронеж, 2002. — 94 с.
7. Recent Air Temperature Changes in the Permafrost Landscapes of Northeastern Eurasia / A.N. Fedorov, R.N. Ivanova, H. Park [et al.] // *Polar Science*. — 2014. — Vol. 8, no. 2. — P. 114–128.
8. Некрасов И.А. Геотермия криолитозоны / И.А. Некрасов. — Москва : Наука, 1984. — 216 с.
9. Kim K.W. A Stochastic Stefan Problem / K.W. Kim // *Journal of Theoretical Probability*. — 2012. — Vol. 25, no. 4. — P. 1040–1080.
10. Stochastic Representation of Spatial Variability in Thaw Depth in Permafrost Boreal Forests / T. Nakai, T. Hiyama, A. Kotani [et al.] // *Permafrost and Periglacial Processes*. — 2023. — Vol. 34, no. 4. — P. 481–493.
11. Enhancement of Arctic Storm Activity in Relation to Permafrost Degradation in Eastern Siberia / Y. Iijima, T. Nakamura, H. Park [et al.] // *International Journal of Climatology*. — 2016. — Vol. 36, no. 13. — P. 4261–4275.
12. Regional Impacts of Water Cycle Changes on Permafrost Eco-hydrological Environment in North-eastern Eurasia / Y. Iijima, T. Hiyama, T. Sato [et al.] // *AGU Fall Meeting Abstracts*. — 2019. — Abstract GC24C-04.
13. Mapping the Main Characteristics of Permafrost on the Basis of a Permafrost-Landscape Map of Yakutia Using GIS / A. Shestakova, A. Fedorov, Y. Torgovkin [et al.] // *Land*. — 2021. — Vol. 10, no. 5. — P. 462.
14. Proceedings of the Symposium on Joint Siberian Permafrost Studies between Japan and Russia in 1992–1994 / eds. N. Solomonov, B. Ivanov, M. Toda. — Yakutsk : Poligrafist, 1995. — 98 p.
15. Permafrost and Culture: Global Warming and the Republic of Sakha (Yakutia), Russian Federation / H. Takakura, Y. Iijima, V. Ignatieva [et al.]. — Sendai : Center for Northeast Asian Studies, Tohoku University, 2021. — 60 p.

References

1. Belolipetskii V.M., Genova S.N. A Numerical Model of the Seasonal Thawing of Permafrost in the Swamp-Lake Landscapes. *Zhurnal Sibirskogo federal'nogo universiteta. Seriya: Matematika i fizika = Journal of Siberian Federal University. Mathematics and Physics*, 2016, vol. 9, no. 2, pp. 158–165. EDN: VXLCHZ. DOI: 10.17516/1997-1397-2016-9-2-158-165.
2. Vasil'ev V.I., Vasil'eva M.V., Nikiforov D.Ya., Sidnyaev N.I., Stepanov S.P., Tseva A.N. Computational Implementation of a Mixed-Dimensional Model of Heat Transfer in the Soil–Pipe System in Cryolithic Zone. *Zhurnal vychislitel'noi matematiki i matematicheskoi fiziki = Computational Mathematics and Mathematical Physics*, 2021, vol. 61, no. 12, pp. 2060–2073. (In Russian). EDN: YWNFHJ. DOI: 10.31857/S0044466921120176.
3. Anikin G.V., Spasennikova K.A. Method of Stochastic Prediction of Soil Temperatures with GET Systems. *Soil Mechanics and Foundation Engineering*, 2017, vol. 54, no. 1, pp. 1–6.
4. Carslaw H.S., Jaeger J.C. *Conduction of Heat in Solids*. 2nd ed. Oxford, Clarendon Press, 1959. 510 p.

5. Balobaev V.T., Kutasov I.M., Eppelbaum L.V. The Maximum Effect of Deep Lakes on Temperature Profiles — Determination of the Geothermal Gradient. *Earth Sciences Research Journal*, 2009, vol. 13, no. 1, pp. 54–63.

6. Golovinskii P.A. *Mathematical Models and Methods. Part 4. Stochastic Models of Complex Systems*. Voronezh, 2002. 94 p.

7. Fedorov A.N., Ivanova R.N., Park H., Hiyama T., Iijima Y. Recent Air Temperature Changes in the Permafrost Landscapes of Northeastern Eurasia. *Polar Science*, 2014, vol. 8, no. 2, pp. 114–128.

8. Nekrasov I.A. *Geothermy of the cryolithozone*. Moscow, Nauka Publ., 1984. 216 p.

9. Kim K.W. A Stochastic Stefan Problem. *Journal of Theoretical Probability*, 2012, vol. 25, no. 4, pp. 1040–1080.

10. Nakai T., Hiyama T., Kotani A., Iijima Y., Ohta T., Maximov T.C. Stochastic Representation of Spatial Variability in Thaw Depth in Permafrost Boreal Forests. *Permafrost and Periglacial Processes*, 2023, vol. 34, no. 4, pp. 481–493.

11. Iijima Y., Nakamura T., Park H., Tachibana Y., Fedorov A.N. Enhancement of Arctic Storm Activity in Relation to Permafrost Degradation in Eastern Siberia. *International Journal of Climatology*, 2016, vol. 36, no. 13, pp. 4261–4275.

12. Iijima Y., Hiyama T., Sato T., Iwahana G., Kotani A., Park H., Takakura H., Fedorov A., Maximov T. Regional Impacts of Water Cycle Changes on Permafrost Eco-hydrological Environment in North-eastern Eurasia. *AGU Fall Meeting Abstracts*, 2019, Abstract GC24C-04.

13. Shestakova A., Fedorov A., Torgovkin Y., Konstantinov P., Vasylyev N., Kalinicheva S., Samsonova V., Hiyama T., Iijima Y. Mapping the Main Characteristics of Permafrost on the Basis of a Permafrost-Landscape Map of Yakutia Using GIS. *Land*, 2021, vol. 10, no. 5, pp. 462.

14. Solomonov N., Ivanov B., Toda M. (eds.) *Proceedings of the Symposium on Joint Siberian Permafrost Studies between Japan and Russia in 1992–1994*. Yakutsk, Poligrafist, 1995. 98 p.

15. Takakura H., Iijima Y., Ignatieva V., Fedorov A., Goto M., Tanaka T. *Permafrost and Culture: Global Warming and the Republic of Sakha (Yakutia), Russian Federation*. Sendai, Center for Northeast Asian Studies, Tohoku University, 2021. 60 p.

Информация об авторах

Боровский Андрей Викторович — доктор физико-математических наук, профессор кафедры математических методов и цифровых технологий, Байкальский государственный университет, 664003, Российская Федерация, г. Иркутск, ул. Ленина, 11, e-mail: andrei-borovskii@mail.ru.

Карымов Роман Ильдарович — аспирант, кафедра математических методов и цифровых технологий, Байкальский государственный университет, 664003, Российская Федерация, г. Иркутск, ул. Ленина, 11, e-mail: roma.karymov.99@mail.ru.

Information about the Authors

Andrey V. Borovsky — D.Sc. in Physics and Mathematics, Professor, Department of Mathematical Methods and Digital Technologies, Baikal State University, 11 Lenin Str., Irkutsk, 664003, Russian Federation, andrei-borovskii@mail.ru.

Roman I. Karymov — PhD Student, Department of Mathematical Methods and Digital Technologies, Baikal State University, 11 Lenin Str., Irkutsk, 664003, Russian Federation, e-mail: roma.karymov.99@mail.ru.

Вклад авторов

Все авторы сделали эквивалентный вклад в подготовку публикации. Авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.

Contribution of the Authors

The authors contributed equally to this article. The authors declare no conflicts of interests.

Для цитирования

Боровский А.В. Математические методы исследования вечной мерзлоты / А.В. Боровский, Р.И. Карымов. — DOI 10.17150/2713-1734.2026.8(2).246-255. — EDN HMDNHU // System Analysis & Mathematical Modeling. — 2026. — Т. 8, № 2. — С. 246–255.

For Citation

Borovsky A.V., Karymov R.I. Mathematical Methods for Studying Permafrost. *System Analysis & Mathematical Modeling*, 2026, vol. 8, no. 2, pp. 246–255. (In Russian). EDN: HMDNHU. DOI: 10.17150/2713-1734.2026.8(2).246-255.