

Научная статья
УДК 536.24
EDN BUZUWW
DOI 10.17150/2713-1734.2026.8(2).229-245



П.А. Головинский
*Воронежский государственный университет,
г. Воронеж, Российская Федерация*

Граничные условия в задачах тепломассопереноса с фазовыми переходами

Аннотация. В работе представлен систематический анализ постановки граничных условий в задачах тепломассопереноса с фазовыми переходами. Рассмотрена эволюция подходов от классических работ Стефана, Тихонова, Самарского, Лыкова до современных моделей, учитывающих фрактальную природу шероховатых поверхностей и гранулированных сред. Особое внимание уделено краевым условиям с дробными производными, позволяющими описывать процессы на поверхностях со сложной масштабно-инвариантной структурой. Приведена классификация граничных условий в табличной форме и продемонстрировано влияние выбора краевых условий на решение практически важных одномерных задач. Обсуждаются физические предпосылки использования дробных производных и связь с экспериментальными данными, полученными автором при исследовании дисперсных сред и фрактальных поверхностей.

Ключевые слова. Граничные условия, задача Стефана, фазовый переход, фрактальная поверхность, дробная производная, теплопроводность.

Информация о статье. Дата поступления: 10 марта 2026; дата принятия к публикации: 15 мая 2026 г.; дата онлайн-размещения: 29 июня 2026 г.

Original article

P.A. Golovinski
*Voronezh State University,
Voronezh, Russian Federation*

Boundary Conditions in Heat and Mass Transfer Problems with Phase Transitions

Abstract. A systematic analysis of the formulation of boundary conditions in heat and mass transfer problems with phase transitions is presented. The evolution of approaches from the classical works of Stefan, Tikhonov, Samarskii, and Lykov to modern models accounting for the fractal nature of rough surfaces and granular media is considered. Particular attention is paid to boundary conditions involving fractional derivatives, which enable the description of processes on surfaces with complex scale-invariant structure. A classification of boundary conditions is given in tabular form, and the influence of the choice of boundary conditions on the solution of practically important one-dimensional problems is demonstrated. The physical prerequisites for using fractional derivatives and their connection with experimental data obtained by the author in studies of dispersed media and fractal surfaces are discussed.

Keywords. Boundary conditions, Stefan problem, phase transition, fractal surface, fractional derivative, heat conduction.

Article info. Received 10 March, 2026; Accepted 15 May, 2026; Available online 29 June, 2026.

Введение

Математическое моделирование процессов тепломассопереноса, сопровождающихся фазовыми переходами, является одной из фундаментальных проблем современной теплофизики. Задачи такого типа, известные как задачи Стефана, возникают при описании плавления, кристаллизации, сублимации, а также в родственных областях — при моделировании движения границ раздела в пористых средах, в металлургии, гляциологии, криобиологии и многих других приложениях. Важнейшим элементом любой математической модели является корректная постановка граничных условий, которые отражают физические процессы на внешних и внутренних подвижных границах. Неправильный выбор или упрощение граничных условий может привести к качественно неверным результатам, даже если само дифференциальное уравнение описывает процесс достаточно точно.

Исторически первые математические постановки задач с подвижной границей при фазовом переходе относятся к XIX в. В 1831 г. Г. Ламе и Б.П. Клапейрон исследовали задачу затвердевания жидкого шара [1], а в 1889–1891 гг. Й. Стефан сформулировал основные соотношения на границе раздела фаз при образовании льда [2; 3]. Эти работы заложили фундамент теории, которая впоследствии получила название задачи Стефана. Классическая постановка включает два условия на фронте: равенство температуры температуре фазового перехода и баланс тепловых потоков (условие Стефана). Дальнейшее развитие математической теории связано с именами А.Н. Тихонова, А.А. Самарского, О.А. Олейник, Л.И. Рубинштейна и многих других исследователей. Тихонов и Самарский разработали строгую теорию уравнений математической физики с разрывными коэффициентами, предложили метод тепловых потенциалов и энтальпийную формулировку, позволяющую рассматривать единое уравнение энергии для всей области, включая фронт [4]. А.В. Лыков в своей монографии «Теория теплопроводности» [5] систематизировал краевые задачи тепломассопереноса, в том числе с учетом контактного термического сопротивления и подвижных границ.

Однако реальные физические системы часто обладают сложной микроструктурой, которая не учитывается в классических моделях. Поверхности реальных материалов далеки от идеально гладких. Они имеют шероховатость, которая может присутствовать на различных масштабах — от микро- до нанометрового. В

гранулированных средах, таких как порошки, засыпки, пористые материалы, контакт между частицами осуществляется через малые площадки, что приводит к значительному дополнительному термическому сопротивлению. Кроме того, в последние десятилетия интенсивно исследуются фрактальные свойства шероховатых поверхностей и пористых сред. Оказалось, что многие природные и техногенные структуры обладают масштабной инвариантностью (самоподобием) в определенном диапазоне размеров, что позволяет описывать их геометрию с помощью фрактальной размерности D_f [6]. Это открывает путь к использованию аппарата дробных производных, которые естественным образом учитывают нелокальные эффекты и «память» системы [7].

Автором настоящей работы совместно с коллегами были выполнены экспериментальные и теоретические исследования, подтверждающие фрактальную природу дисперсных сред и поверхностей. В работе [8] исследовалось прохождение акустических импульсов через слой мелкодисперсного песка. Было показано, что экспериментальные данные хорошо описываются волновым уравнением с дробными производными, причем фрактальные параметры среды определяются из акустических измерений. В другой работе [9] изучалась структура двойного электрического слоя у фрактальной поверхности. С помощью аппарата дробных производных были получены выражения для энергии и массы жидкости в системе с фрактальной границей, что позволило интерпретировать результаты калориметрического анализа влажного песка. Эти исследования подтверждают адекватность применения дробно-дифференциальных моделей для описания поверхностных явлений на шероховатых границах.

Цель настоящей работы — систематизировать граничные условия, используемые в задачах тепломассопереноса с фазовыми переходами, начиная с классических и заканчивая современными, включающими дробные производные. Особое внимание уделяется физическому смыслу этих условий и их влиянию на решение на примерах одномерных задач. Предлагается классификация краевых условий, которая может служить методическим руководством при выборе адекватной постановки для конкретной прикладной задачи.

Классические граничные условия в задачах с фазовыми переходами

Рассмотрим двухфазную систему, в которой фазы разделены подвижной границей $\Gamma(t)$. В одномерном случае положение границы задается функцией $x = s(t)$. Будем обозначать температуры в первой и второй фазах как $T_1(x, t)$ и $T_2(x, t)$ соответственно. На фронте фазового перехода должны выполняться два фундамен-

тальных условия, вытекающие из законов термодинамики и закона сохранения энергии.

Прежде всего, это условие термодинамического равновесия: на границе раздела фаз температура непрерывна и равна температуре фазового перехода T_m (для чистых веществ — температуре плавления или кристаллизации). Данное условие записывается как

$$T_1(s(t), t) = T_2(s(t), t) = T_m. \quad (1)$$

В классической постановке T_m считается постоянной величиной, не зависящей от кривизны фронта или внешних условий. Однако в тонких слоях или наноразмерных пленках необходимо учитывать эффект Гиббса–Томсона, согласно которому температура плавления зависит от кривизны поверхности раздела. В еще более общем случае, для многокомпонентных систем, температура фазового равновесия может зависеть от концентрации примесей или давления. Тем не менее для большинства инженерных приложений постоянство T_m является хорошим приближением.

Второе необходимое условие — баланс энергии на фронте, или условие Стефана. Тепловые потоки, подходящие к фронту из разных фаз, различаются на величину, равную скорости поглощения или выделения скрытой теплоты фазового перехода. Если обозначить через λ_1 и λ_2 коэффициенты теплопроводности фаз, ρ — плотность (обычно предполагаемую одинаковой для обеих фаз, хотя в общем случае плотности могут различаться), L — удельную теплоту фазового перехода, а v_n — скорость движения фронта в направлении нормали n , то условие Стефана принимает вид

$$\lambda_1 \frac{\partial T_1}{\partial n} \big|_{\Gamma(t)} - \lambda_2 \frac{\partial T_2}{\partial n} \big|_{\Gamma(t)} = \rho L v_n. \quad (2)$$

Знаки в левой части зависят от выбора направления нормали. В приведенной записи нормаль направлена от первой фазы ко второй, и предполагается, что вторая фаза образуется (например, при плавлении твердое тело переходит в жидкость). Если направление нормали изменить, знаки поменяются. Важно отметить, что в многомерных задачах скорость фронта v_n связана с перемещением границы и может быть выражена через производную по времени от функции, описывающей положение фронта. Условие Стефана является основным для задач с фазовыми переходами, поскольку оно связывает температурное поле с кинематикой движения границы. Без него задача была бы недоопределена. В энтальпийной формулировке, предложенной Тихоновым и Самарским, условие Стефана автоматически выполняется при переходе к единому уравнению для энтальпии, что удобно для численных методов.

На внешних фиксированных границах расчетной области, которые считаются неподвижными (например, поверхность твердого тела, контактирующая с окружающей средой), могут задаваться условия трех основных типов. Эти условия подробно описаны в классических монографиях [4, 5] и широко используются в инженерной практике. Для удобства сведем их в табл. 1.

Таблица 1

Классические граничные условия на внешних границах

Тип условия	Математическая запись	Физический смысл
I рода (Дирихле)	$T _{\Gamma} = T_w(t)$	Заданная температура (контакт с термостатом)
II рода (Неймана)	$-\lambda \frac{\partial T}{\partial n} = q(t)$	Заданный тепловой поток (лазерный нагрев)
III рода (Робена)	$-\lambda \frac{\partial T}{\partial n} = \alpha(T_{env} - T)$	Конвективный теплообмен с коэффициентом α

Условия первого рода наиболее просты, но в реальности точно поддерживать температуру на поверхности удается редко, поскольку чаще она является результатом теплообмена. Условия второго рода применяются, когда тепловой поток известен, например, при лазерном нагреве мишени с заданной мощностью. Условия третьего рода наиболее адекватны для большинства технических приложений, поскольку конвективный теплообмен является основным механизмом теплового взаимодействия с окружающей средой. Коэффициент теплоотдачи α зависит от многих факторов: скорости потока, свойств среды, геометрии поверхности и т.д. Его определение часто требует дополнительных экспериментальных или эмпирических данных.

В задачах, где рассматриваются многослойные структуры (например, тонкий слой на подложке), необходимо задавать условия сопряжения на внутренних фиксированных границах раздела различных материалов. Здесь возможны два основных варианта. При идеальном тепловом контакте, когда поверхности соприкасающихся тел идеально гладкие и плотно прилегают друг к другу, температура и тепловой поток через границу непрерывны:

$$T_1 = T_2, \quad \lambda_1 \frac{\partial T_1}{\partial n} = \lambda_2 \frac{\partial T_2}{\partial n}. \quad (3)$$

В реальности из-за шероховатости, наличия оксидных пленок, газовых прослоек или других факторов на границе возникает скачок температуры. В этом случае используется условие с контактным сопротивлением R_k :

$$-\lambda_1 \frac{\partial T_1}{\partial n} = \frac{T_1 - T_2}{R_k}. \quad (4)$$

Величина R_k зависит от многих параметров: шероховатости поверхностей, контактного давления, температуры, наличия смазки или промежуточных сред. Экспериментальное определение R_k является сложной задачей, и часто его значение оценивают по полуэмпирическим формулам. Влияние контактного сопротивления может быть существенным, особенно в тонких пленках и микросистемах.

Фрактальные модели и краевые условия с дробными производными

Реальные поверхности, даже после тщательной механической обработки, обладают сложным рельефом, который не может быть описан простыми аналитическими функциями. Многочисленные экспериментальные исследования показали, что профили таких поверхностей часто обладают свойством масштабной инвариантности (самоподобия или самоаффинности) в определенном диапазоне масштабов. Это означает, что увеличенный фрагмент профиля статистически подобен исходному профилю. Такие структуры называются фрактальными. Фрактальная размерность D_f шероховатой поверхности лежит в интервале $2 \leq D_f < 3$. Чем ближе D_f к 3, тем более развитой является поверхность, и тем большую роль играют мелкомасштабные неоднородности. Для многих материалов (металлы после пескоструйной обработки, горные породы, грунты) фрактальная размерность составляет 2.2–2.5 [10; 11].

Наличие фрактальной структуры существенно влияет на процессы теплопереноса. Во-первых, реальная площадь поверхности, участвующей в теплообмене, оказывается значительно больше проекционной площади, что увеличивает эффективный тепловой поток. Во-вторых, тепловое взаимодействие с фрактальной границей носит нелокальный характер: температура в данной точке зависит от состояния поверхности в некоторой окрестности из-за дальних корреляций, присущих фракталам. Это приводит к необходимости модификации классических граничных условий.

Экспериментальное подтверждение фрактальных свойств дисперсных сред было получено в работе [8], где исследовалось прохождение ультразвукового импульса через слой дробленого песка различной фракции. Оказалось, что форма импульса и затухание не описываются классическим волновым уравнением, но хорошо аппроксимируются решением уравнения с дробными производными. Фрактальные параметры среды, извлеченные из акустических данных, коррелировали с геометрическими характеристиками упаковок частиц. В работе [9] изучалась структура двойного электрического слоя у фрактальной поверхности. С помощью аппарата дробных производных были получены выражения для энергии и массы жидкости в системе с фрактальной грани-

цей, что позволило количественно интерпретировать результаты калориметрического анализа влажного песка. Эти исследования убедительно показывают, что дробно-дифференциальные модели являются адекватным инструментом для описания процессов на фрактальных границах.

Дробные производные являются обобщением понятия производной целого порядка на нецелые порядки. Существует несколько определений, наиболее употребительными из которых являются определения Римана–Лиувилля и Капуто. Для функции $f(t)$, определенной при $t > 0$, дробная производная Римана–Лиувилля порядка α ($0 < \alpha < 1$) определяется как

$$D_{RL}^{\alpha} f(t) = \frac{1}{\Gamma(1 - \alpha)} \frac{d}{dt} \int_0^t \frac{f(\tau)}{(t - \tau)^{\alpha}} d\tau, \quad (5)$$

где Γ — гамма-функция. Дробная производная Капуто, более удобная при постановке начальных условий, имеет вид

$$D_C^{\alpha} f(t) = \frac{1}{\Gamma(1 - \alpha)} \int_0^t \frac{f'(\tau)}{(t - \tau)^{\alpha}} d\tau. \quad (6)$$

Основное отличие между определениями (5) и (6) заключается в том, что производная Капуто (6) от константы равна нулю, и в ее преобразованиях Лапласа фигурируют начальные значения функции, а не ее дробных интегралов.

Физический смысл дробных производных связан с учетом эффектов памяти и пространственных корреляций. Интеграл в определении (5) показывает, что значение производной в момент t зависит от всей предыстории функции с весом, убывающим по степенному закону. Это естественно для систем с фрактальной структурой, где дальнodelствующие корреляции приводят к аномальной диффузии и релаксации.

При наличии фрактальной шероховатости классические граничные условия требуют модификации. В отличие от моделей, использующих временные дробные производные (учитывающих эффекты памяти), для описания локального влияния развитой поверхности на теплообмен физически оправдано введение дробных производных по пространственной координате (нормали к поверхности). Такой подход позволяет учесть аномальный характер теплопереноса в приповерхностном фрактальном слое, где эффективная теплопроводность зависит от масштаба. Основная идея, развиваемая в работах Ланчия, Капитанелли и других авторов [12; 13], а также в исследованиях по дробному исчислению для фрактальных сред [7; 14; 15], заключается во введении в граничные условия дополнительных слагаемых, содержащих дробные производные по пространственной переменной. Эти слагаемые учиты-

вают нелокальный характер взаимодействия, обусловленный геометрией границы. В табл. 2 представлены основные типы таких условий применительно к задачам теплопереноса.

Таблица 2

**Граничные условия с дробными производными
для фрактальных поверхностей**

Тип условия	Математическая запись
Конвективный теплообмен	$-\lambda \frac{\partial T}{\partial n} = \alpha(T_{env} - T) + \beta D_n^\gamma (T_{env} - T),$ $\gamma = D_f - 1$
Контактное сопротивление	$-\lambda_1 \frac{\partial T_1}{\partial n} = \frac{T_1 - T_2}{R_k} + \eta D_n^\delta (T_1 - T_2)$
Модифицированное условие Стефана	$\lambda_1 \frac{\partial T_1}{\partial n} - \lambda_2 \frac{\partial T_2}{\partial n} = \rho L v_n + \mu D_n^\nu (\rho s(t))$

Поясним физический смысл этих дополнительных членов. Дробная производная D_n^γ по нормали к поверхности (порядка γ , $0 < \gamma < 1$) отражает тот факт, что из-за фрактальной структуры градиент температуры в приповерхностной области не является локальной характеристикой, а зависит от распределения температуры в некоторой окрестности границы. Фрактальная шероховатость создаёт эффективный переходный слой с аномальными свойствами переноса, что математически выражается через интегро-дифференциальный оператор дробного порядка. Параметр γ связан с фрактальной размерностью поверхности ($\gamma = D_f - 1$ или более сложной зависимостью, определяемой микроструктурой). В отличие от моделей с временными производными, описывающих релаксацию («память»), пространственные дробные производные адекватно работают как в нестационарных, так и в стационарных задачах, поскольку характеризуют именно геометрию границы, а не кинетику процесса.

Важно подчеркнуть, что дробные параметры β , η , μ , δ , ν должны определяться либо из экспериментов, либо из более детальных моделей, учитывающих микроструктуру поверхности. В работах автора и его коллег такие параметры были извлечены из акустических и калориметрических данных для дисперсных сред [8; 9], что подтверждает практическую применимость предложенных моделей.

Классификация краевых условий

Для систематизации многообразия граничных условий, используемых в задачах тепломассопереноса с фазовыми переходами, предлагается классификация по нескольким признакам. Эта

классификация может быть полезна при выборе адекватной постановки для конкретной задачи и при разработке численных методов. Основные категории представлены в табл. 3–5.

Для статистически шероховатых поверхностей часто используют подход, основанный на введении эффективных коэффициентов теплоотдачи или контактного сопротивления, которые зависят от среднеквадратичной высоты неровностей, радиуса кривизны выступов и других геометрических параметров.

Таблица 3

Классификация по типу границы

Категория	Виды условий
Фиксированные внешние границы	I рода, II рода, III рода, идеальный контакт, контакт с сопротивлением
Подвижные внутренние границы (фронт)	Термодинамическое равновесие, Стефана, Гиббса–Томсона, дробно-дифференциальное
Подвижные внешние границы	Абляция, плавление поверхности, сублимация, испарение

Подвижные внешние границы возникают, например, при абляции теплозащитных покрытий, когда материал уносится потоком газа, или при плавлении поверхности под действием интенсивного нагрева. В этих случаях положение границы определяется дополнительным уравнением, связывающим скорость движения с тепловым потоком или температурой.

Таблица 4

Классификация по учету микроструктуры поверхности

Тип поверхности	Характер условий
Гладкая (идеальная)	Классические условия (1)–(4)
Статистически шероховатая	Эффективные коэффициенты, контактное сопротивление
Фрактальная (самоподобная)	Дробные производные по пространству и/или времени

Однако перечисленные модели не учитывают возможную масштабную инвариантность и требуют модификации для фрактальных поверхностей.

Таблица 5

Классификация по числу фаз и режимам теплообмена

Признак	Варианты
Число фаз	Однофазные, двухфазные, многофазные, с двухфазной зоной
Режим теплообмена	Линейные, нелинейные, с гистерезисом

Задачи с двухфазной зоной возникают при плавлении сплавов или в пористых средах, где твердая и жидкая фазы сосуществуют в некотором интервале температур. В таких случаях условия на границах зоны требуют специального рассмотрения и часто включают законы сохранения массы и энергии для двухфазной смеси.

Предложенная классификация не претендует на полноту, но охватывает распространенные типы условий, встречающиеся в литературе и инженерной практике.

Влияние граничных условий на решение одномерных задач

Для того чтобы проиллюстрировать, насколько существенным может быть выбор граничных условий, рассмотрим несколько одномерных задач, в которых одно и то же уравнение теплопроводности приводит к качественно различным решениям. Эти примеры взяты из классической и современной литературы и демонстрируют важность корректной постановки краевых условий.

В первой задаче рассматривается кристаллизация расплава на охлаждаемой стенке. Пусть имеется полубесконечный слой расплава, занимающий область $x > 0$. Начальная температура расплава постоянна и равна $T_0 > T_m$, где T_m — температура кристаллизации. В момент времени $t = 0$ на границе $x = 0$ начинается охлаждение. Требуется найти распределение температуры и положение фронта кристаллизации $s(t)$, отделяющего твердую фазу (при $0 < x < s(t)$) от жидкой (при $x > s(t)$). В твердой фазе температура $T_1(x, t)$, в жидкой — $T_2(x, t)$. На фронте выполняются условия (1) и (2). Начальное условие: $T_2(x, 0) = T_0$. Рассмотрим два варианта граничных условий на стенке.

В первом варианте (граничное условие первого рода) предполагается, что температура стенки мгновенно принимает постоянное значение $T_w < T_m$ и поддерживается неизменной: $T_1(0, t) = T_w$. Это классическая задача Стефана для полубесконечной области. Ее решение известно и имеет автомодельный вид. Положение фронта пропорционально $\sqrt{t}$: $s(t) = 2\beta\sqrt{\alpha_1 t}$, где $\alpha_1 = \lambda_1 / (\rho c_1)$ — температуропроводность твердой фазы. Постоянная β определяется из трансцендентного уравнения, которое получается подстановкой автомодельного решения в условие Стефана. Таким образом, решение полностью определяется теплофизическими параметрами и граничной температурой T_m . Подробный вывод и анализ этого решения представлены в [4] и [5].

Во втором варианте используется граничное условие третьего рода: на стенке происходит конвективный теплообмен со средой, имеющей постоянную температуру $T_{env} < T_m$, с коэффициентом теплоотдачи α . Тогда условие на границе имеет вид —

$\lambda_1 \frac{\partial T_1}{\partial x} \Big|_{x=0} = \alpha(T_{env} - T_1(0, t))$. В этом случае задача уже не является автомодельной в строгом смысле, поскольку граничное

условие вводит характерное время, связанное с теплообменом. Решение можно построить численно или с помощью интегральных методов. Качественное отличие от первого варианта заключается в том, что температура стенки не фиксирована, а изменяется во времени, приближаясь к T_{env} . В начальный момент тепловой поток максимален, затем уменьшается. Соответственно, скорость кристаллизации вначале выше, чем в варианте с фиксированной температурой при той же $T_w = T_{env}$, но со временем падает. При малых временах оба решения близки, если число Био $Bi = \alpha \sqrt{a_1 t} / \lambda_1$ велико, но при больших временах расхождение становится существенным. Этот пример показывает, что пренебрежение конвективным теплообменом и замена его условием первого рода (бесконечной скоростью теплоотвода на границе) может привести к завышенной оценке скорости кристаллизации.

Вторая задача посвящена плавлению тонкого слоя на подложке. Рассмотрим тонкий слой материала толщины δ , нанесенный на массивную подложку. Слой нагревается излучением на внешней границе $x = \delta$ с постоянной интенсивностью q_0 (условие второго рода). Подложка при $x = 0$ поддерживается при постоянной температуре T_{sub} (термостат). Внутри слоя происходит плавление, фронт движется от внешней границы внутрь. Теплофизические свойства слоя и подложки различны. Необходимо определить динамику плавления.

При идеальном тепловом контакте слоя с подложкой на границе $x = 0$ выполняются условия (3): температура и тепловой поток непрерывны. Тепло, подводимое к слою, частично расходуеться на плавление, частично отводится в подложку. При достаточно большой теплопроводности подложки и малом δ отвод тепла может быть столь интенсивным, что температура на внешней границе никогда не достигнет T_m , и плавление не начнется. Если же q_0 превышает критическое значение, плавление начинается, и фронт движется к подложке. Скорость движения определяется балансом подводимого и отводимого тепла.

При наличии контактного термического сопротивления между слоем и подложкой на границе $x = 0$ задается условие (4) с конечным R_k . В этом случае из-за скачка температуры на границе слой оказывается более горячим, чем при идеальном контакте при том же подводе тепла. Плавление начинается раньше и идет быстрее. При очень большом R_k отвод тепла в подложку пренебрежимо мал, и почти вся подводимая энергия идет на плавление. Таким образом, наличие контактного сопротивления качественно меняет картину. Этот эффект особенно важен для тонких пленок и покрытий, где даже малое сопротивление может существенно влиять на тепловые режимы.

Третья задача рассматривает плавление на подложке с фрактальной шероховатостью. Предположим, что поверхность подложки имеет фрактальную структуру с размерностью $D_f = 2.3$. Для описания контактного теплообмена используем обобщенное условие с дробной производной по пространственной нормали (второе уравнение в табл. 2). Параметры η и δ выбираются на основе экспериментальных данных для аналогичных материалов. Численное моделирование такой задачи (подробно описанное в работе [13]) выявляет новые особенности по сравнению с классическим случаем (контактное сопротивление с постоянным R_k).

При резком включении нагрева температура на границе слоя и подложки изменяется не скачком, а плавно, причем релаксация происходит по степенному закону $t^{-\delta}$, а не экспоненциально. Это связано с памятью, которую вносит дробная производная. Если нагрев модулирован во времени (например, импульсный лазер), то температурные колебания на границе испытывают фазовый сдвиг относительно классического решения, причем величина сдвига зависит от частоты и параметра δ . Интегральное количество расплавленного материала за фиксированное время может отличаться от классического на 15–25 % в зависимости от параметров фрактальной шероховатости. Это показывает, что пренебрежение фрактальной структурой может привести к значительным погрешностям в технологических расчетах. Общие вопросы постановки краевых условий на фрактальных границах рассмотрены в [12; 13; 15; 16].

Граничные условия при моделировании сезонного протаивания мерзлоты в районе Иркутска

Для демонстрации практической значимости рассмотренных граничных условий проанализируем задачу сезонного протаивания многолетнемерзлых пород в районе Иркутска. Данный регион характеризуется резко континентальным климатом с годовыми амплитудами температуры воздуха до 40–50°C и суточными колебаниями в летний период, достигающими 15–20°C, значительной ролью солнечной радиации (до 800 Вт/м² в полдень) и эффективного излучения в ночные часы, а также неоднородным составом грунтов: суглинки, торфяники, трещиноватые скальные породы, обладающие фрактальными свойствами благодаря самоподобию структуры пор и шероховатости частиц. Эти факторы требуют постановки граничных условий, выходящих за рамки классических схем.

Рассмотрим одномерную задачу теплопроводности с фазовым переходом в полубесконечном массиве грунта. Ось x направлена вертикально вниз, начало координат $x = 0$ соответствует дневной поверхности. В массиве выделяются талая зона $0 < x < s(t)$ с температурой $T_1(x, t)$ и мерзлая зона $x > s(t)$ с температурой

$T_2(x, t)$; фронт фазового перехода $x = s(t)$ имеет температуру $T_m = 0^\circ \text{C}$. Классическое условие энергетического баланса на поверхности записывается как

$$-\lambda_1 \frac{\partial T_1}{\partial x} \Big|_{x=0} = q_{\text{solar}}(t) + q_{\text{conv}}(t) + q_{\text{rad}}(t), \quad (7)$$

где $q_{\text{solar}}(t) = (1 - A)S(t)$ — поглощенная коротковолновая радиация (альбе́до A зависит от наличия снега или растительности), $q_{\text{conv}}(t) = \alpha(T_{\text{air}}(t) - T_1(0, t))$ — турбулентный теплообмен с атмосферой, $q_{\text{rad}}(t) = \varepsilon\sigma(T_{\text{air}}^4(t) - T_1^4(0, t))$ — эффективное длинноволновое излучение.

Для учета фрактальной шероховатости поверхности (моховой покров, кочки, микрорельеф) модифицируем это условие, вводя дополнительное слагаемое с дробной производной по пространственной нормали, как предложено в табл. 2:

$$-\lambda_1 \frac{\partial T_1}{\partial x} \Big|_{x=0} = q_{\text{solar}}(t) + \alpha(T_{\text{air}} - T_1) + \beta \mathcal{D}_x^\gamma (T_{\text{air}} - T_1) + \varepsilon\sigma(T_{\text{air}}^4 - T_1^4). \quad (8)$$

Здесь $\mathcal{D}_x^\gamma$ — дробная производная порядка $\gamma = D_f - 1$ по пространственной координате (нормали), D_f — фрактальная размерность поверхности; параметр β и порядок γ определяются экспериментально, например, по методике, описанной в [8]. Физически это слагаемое отражает вклад боковых поверхностей микронеровностей в теплообмен, делая взаимодействие с атмосферой нелокальным.

На фронте фазового перехода классическое условие Стефана имеет вид

$$\lambda_1 \frac{\partial T_1}{\partial x} \Big|_{x=s(t)-0} - \lambda_2 \frac{\partial T_2}{\partial x} \Big|_{x=s(t)+0} = \rho L \frac{ds}{dt}. \quad (9)$$

Для дисперсных грунтов с фрактальной структурой пор (например, торф или суглинок с включениями льда) движение поровой влаги и теплоперенос вблизи фронта носят аномальный характер, что учитывается добавлением члена с дробной производной по времени, моделирующего эффекты памяти:

$$\lambda_1 \frac{\partial T_1}{\partial x} \Big|_{x=s(t)-0} - \lambda_2 \frac{\partial T_2}{\partial x} \Big|_{x=s(t)+0} = \rho L \frac{ds}{dt} + \mu \mathcal{D}_t^\nu s(t), \quad (10)$$

где $\mathcal{D}_t^\nu$ — дробная производная Капуто порядка ν ($0 < \nu < 1$). Слагаемое $\mu \mathcal{D}_t^\nu s(t)$ описывает гистерезисные явления, учитывая запаздывание реакции фронта на суточные колебания температуры из-за капиллярного удержания влаги в фрактальных порах.

Предложенная постановка позволяет качественно предсказать ряд эффектов, которые должны наблюдаться при сравнении классической и фрактальной моделей. Пренебрежение радиационным нагревом (замена энергетического баланса условием первого рода $T(0, t) = T_{\text{air}}(t)$) должно приводить к систематическому занижению дневных температур поверхности и, как следствие, к занижению глубины протаивания. Учет радиации принципиально важен для регионов с высокой солнечной инсоляцией, таких как Иркутск. Включение дробной производной D_x^γ в поверхностное условие должно приводить к сглаживанию суточных пиков температуры: дневной максимум станет ниже, а ночной минимум — выше по сравнению с классическим решением, что является следствием нелокального теплообмена через увеличенную эффективную площадь поверхности. Член $\mu D_t^\gamma s(t)$ в условии на фронте обусловит запаздывание реакции положения границы раздела на изменение температуры поверхности. В классическом решении $s(t)$ монотонно растет в течение теплого периода, тогда как фрактальная модель может демонстрировать «плато» или временный останов в периоды кратковременных похолоданий, что качественно согласуется с натурными наблюдениями геокриологов, фиксирующих замедленную реакцию мерзлоты на суточные и синоптические колебания температуры. Совместное действие фрактальных поправок может привести к тому, что суммарная глубина протаивания за сезон будет отличаться от классической оценки. Направление и величина этого отклонения зависят от фрактальных параметров (D_f, γ, ν) и климатических характеристик. Для залесенных и заторфованных участков с высокой фрактальной размерностью поверхности ожидается уменьшение глубины протаивания по сравнению с классической моделью, что соответствует эффекту «теплоизоляции» мохового покрова.

Заключение

Проведенный анализ позволяет сделать следующие выводы. Корректная постановка граничных условий является важнейшим этапом математического моделирования задач тепломассопереноса с фазовыми переходами. Выбор конкретного типа условий должен определяться физической сущностью процесса и доступной информацией о взаимодействии системы с окружающей средой. Классические подходы, развитые в трудах Тихонова, Самарского, Лыкова и их последователей, создали надежный фундамент для решения широкого класса задач и сохраняют свою актуальность для систем, где можно пренебречь микроструктурными эффектами.

Однако современные материалы и технологии (тонкие пленки, наноструктуры, пористые и гранулированные среды) требуют учета сложной геометрии поверхностей и границ раздела. Фрактальная

геометрия предоставляет адекватный язык для описания масштабно-инвариантных свойств реальных поверхностей. Краевые условия с дробными производными представляют собой естественное обобщение классических условий на случай фрактальных границ. Они позволяют учесть нелокальный характер взаимодействия и эффекты памяти, возникающие при теплопереносе на сильно развитых поверхностях. Экспериментальные исследования, в том числе выполненные автором [8; 9], подтверждают применимость таких моделей для дисперсных сред и фрактальных поверхностей.

Предложенная классификация краевых условий, сведенная в таблицы, охватывает как классические, так и современные постановки. Она может служить методическим руководством при выборе адекватных граничных условий для конкретной прикладной задачи. При решении практических задач рекомендуется оценивать параметры, определяющие значимость микроструктурных эффектов: число Био, отношение характерного размера неровностей к толщине слоя, фрактальную размерность поверхности. На основе такой оценки принимается решение о необходимости использования модифицированных граничных условий с дробными производными.

Дальнейшее развитие исследований в этой области связано с экспериментальным определением параметров дробных производных для конкретных классов поверхностей, разработкой эффективных численных методов решения задач с дробными граничными условиями, а также обобщением предложенного подхода на многокомпонентные системы и задачи с химическими реакциями. Особый интерес представляет применение дробно-дифференциальных моделей для описания процессов в биологических тканях, где фрактальная структура является правилом, а не исключением.

Важно подчеркнуть, что переход от качественного анализа к количественным прогнозам требует проведения численного моделирования поставленных краевых задач. Численные эксперименты позволяют оценить чувствительность решений к вариациям фрактальных параметров (γ , ν , β , μ), верифицировать модели по имеющимся натурным данным (в том числе для района Иркутска) и выработать рекомендации для инженерных расчетов. Разработка устойчивых и точных численных алгоритмов для уравнений с дробными производными по пространству и времени является самостоятельной важной задачей вычислительной математики, решение которой открывает путь к широкому внедрению фрактальных моделей в практику геокриологии, теплофизики и материаловедения.

Список использованной литературы

1. Lamé G. Mémoire sur la Solidification Par Refroidissement d'un Globe Liquide / G. Lamé, B.P. Clapeyron // Annales de Chimie et de Physique. — 1831. — Vol. 47. — P. 250–256.

2. Stefan J. Ueber einige Probleme der Theorie der Wärmeleitung / J. Stefan // Sitzungsberichte der Kaiserlichen Akademie der Wissenschaften Wien. — 1889. — Bd. 98. — S. 473–484.
3. Stefan J. Ueber die Theorie der Eisbildung / J. Stefan // Annalen der Physik und Chemie. — 1891. — Bd. 42. — S. 269–286.
4. Тихонов А.Н. Уравнения математической физики / А.Н. Тихонов, А.А. Самарский. — Москва : Наука, 1972. — 735 с.
5. Лыков А.В. Теория теплопроводности / А.В. Лыков. — Москва : Высшая школа, 1967. — 600 с.
6. Mandelbrot B.B. The Fractal Geometry of Nature / B.B. Mandelbrot. — San Francisco : W.H. Freeman, 1982. — 468 p.
7. Kilbas A.A. Theory and Applications of Fractional Differential Equations / A.A. Kilbas, H.M. Srivastava, J.J. Trujillo. — Amsterdam : Elsevier, 2006. — 540 p.
8. Investigation of the Propagation of an Ultrasound Pulse in a Dispersed Fractal Medium / P.A. Golovinskii, D.Yu. Zolototrubov, Yu.S. Zolototrubov, V.T. Pertsev // Technical Physics Letters. — 1999. — Vol. 25, no. 6. — P. 427–428.
9. Перцев В.Т. Структура двойного слоя вблизи фрактальной поверхности / В.Т. Перцев, П.А. Головинский. — EDN HTSHNL // Известия высших учебных заведений. Прикладная нелинейная динамика. — 2000. — Т. 8, № 3. — С. 31–36.
10. Majumdar A. Fractal Model of Elastic-Plastic Contact Between Rough Surfaces / A. Majumdar, B. Bhushan. — DOI 10.1115/1.2920588 // Journal of Tribology. — 1991. — Vol. 113. — P. 1–11.
11. Yu B. A Fractal Model for the Effective Thermal Conductivity of Bidispersed Porous Media / B. Yu, P. Cheng. — DOI 10.2514/2.6669 // International Journal of Heat and Mass Transfer. — 2002. — Vol. 45. — P. 2983–2993.
12. Lancia M.R. Irregular Heat Flow Problems / M.R. Lancia, P. Vernole. — DOI 10.1137/090761173 // SIAM Journal on Mathematical Analysis. — 2010. — Vol. 42, no. 4. — P. 1539–1567.
13. Capitanelli R. Fractional Diffusion Across Fractal Interfaces / R. Capitanelli, M.R. Lancia // Communications on Pure and Applied Analysis. — 2021. — Vol. 20, no. 6. — P. 2205–2229.
14. Бейбалаев В.Д. Математические модели теплопереноса во фрактальных средах с дробными производными / В.Д. Бейбалаев // Вестник Дагестанского государственного университета. — 2009. — № 1. — С. 23–28.
15. Ветлугин Р.П. Анализ задачи теплопроводности для полубесконечного тела с учетом эффектов памяти и пространственных корреляций / Р.П. Ветлугин, А.Р. Мекеев // Вестник Дагестанского государственного университета. — 2023. — Т. 38, № 4. — С. 35–42.
16. Lancia M.R. Asymptotic Convergence of Transmission Energy Forms / M.R. Lancia, M.A. Vivaldi // Advances in Mathematical Sciences and Applications. — 2003. — Vol. 13. — P. 315–334.

References

1. Lamé G., Clapeyron B.P. Mémoire sur la Solidification Par Refroidissement d'un Globe Liquide. *Annales de Chimie et de Physique*, 1831, vol. 47, pp. 250–256.
2. Stefan J. Ueber einige Probleme der Theorie der Wärmeleitung. *Sitzungsberichte der Kaiserlichen Akademie der Wissenschaften Wien*, 1889, vol. 98, pp. 473–484.
3. Stefan J. Ueber die Theorie der Eisbildung. *Annalen der Physik und Chemie*, 1891, vol. 42, pp. 269–286.
4. Tikhonov A.N., Samarskii A.A. *Equations of mathematical physics*. Moscow, Nauka Publ., 1972. 735 p.
5. Lykov A.V. *Theory of thermal conductivity*. Moscow, Vysshaya shkola Publ., 1967. 600 p.

6. Mandelbrot B.B. *The Fractal Geometry of Nature*. San Francisco, W.H. Freeman, 1982. 468 p.
7. Kilbas A.A., Srivastava H.M., Trujillo J.J. *Theory and Applications of Fractional Differential Equations*. Amsterdam, Elsevier, 2006. 540 p.
8. Golovinskii P.A., Zolototrubov D.Yu., Zolototrubov Yu.S., Pertsev V.T. Investigation of the Propagation of an Ultrasound Pulse in a Dispersed Fractal Medium. *Technical Physics Letters*, 1999, vol. 25, no. 6, pp. 427–428.
9. Pertzev V.T., Golovinski P.A. Double Layer Structure at the Fractal Surface. *Izvestiya vysshikh uchebnykh zavedenii. Prikladnaya nelineinaya dinamika = Izvestiya vuz. Applied Nonlinear Dynamics*, 2000, vol. 8, no. 3, pp. 31–36. (In Russian). EDN: HTSHHL.
10. Majumdar A., Bhushan B. Fractal Model of Elastic-Plastic Contact Between Rough Surfaces. *Journal of Tribology*, 1991, vol. 113, pp. 1–11. DOI: 10.1115/1.2920588.
11. Yu B., Cheng P. A Fractal Model for the Effective Thermal Conductivity of Bidispersed Porous. *International Journal of Heat and Mass Transfer*, 2002, vol. 45, pp. 2983–2993. DOI: 10.2514/2.6669.
12. Lancia M.R., Vernole P. Irregular Heat Flow Problems. *SIAM Journal on Mathematical Analysis*, 2010, vol. 42, no. 4, pp. 1539–1567. DOI 10.1137/090761173.
13. Capitanelli R., Lancia M.R. Fractional Diffusion Across Fractal Interfaces. *Communications on Pure and Applied Analysis*, 2021, vol. 20, no. 6, pp. 2205–2229.
14. Beibalaev V.D. Mathematical models of heat transfer in fractal media with fractional derivatives. *Vestnik Dagestanskogo gosudarstvennogo universiteta = Bulletin of Dagestan State University*, 2009, no. 1, pp. 23–28. (In Russian).
15. Vetlugin R.R., Mekkeev A.R. Analysis of the heat conduction problem for a semi-infinite body taking into account memory effects and spatial correlations. *Vestnik Dagestanskogo gosudarstvennogo universiteta = Bulletin of Dagestan State University*, 2023, vol. 38, no. 4, pp. 35–42. (In Russian).
16. Lancia M.R., Vivaldi M.A. Asymptotic Convergence of Transmission Energy Forms. *Advances in Mathematical Sciences and Applications*, 2003, vol. 13, pp. 315–334.

Информация об авторе

Головинский Павел Абрамович — доктор физико-математических наук, профессор, профессор кафедры технологий обработки и защиты информации, Воронежский государственный университет, 394018, Российская Федерация, г. Воронеж, Университетская пл., 1, e-mail: golovinski@bk.ru.

Information about the Author

Pavel A. Golovinski — D.Sc. in Physics and Mathematics, Professor, Department of Information Processing and Protection Technologies, Voronezh State University, 1 Universitetskaya Square, Voronezh, 394018, Russian Federation, e-mail: golovinski@bk.ru.

Для цитирования

Головинский П.А. Граничные условия в задачах тепломассопереноса с фазовыми переходами / П.А. Головинский. — DOI 10.17150/2713-1734.2026.8(2).229-245. — EDN BUZUWW // System Analysis & Mathematical Modeling. — 2026. — Т. 8, № 2. — С. 229–245.

For Citation

Golovinski P.A. Boundary Conditions in Heat and Mass Transfer Problems with Phase Transitions. *System Analysis & Mathematical Modeling*, 2026, vol. 8, no. 2, pp. 229–245. (In Russian). EDN: BUZUWW. DOI: 10.17150/2713-1734.2026.8(2).229-245.