



Д.М. Нгуен

*Иркутский национальный исследовательский  
технический университет,  
г. Иркутск, Российская Федерация*

## Покрытие эллипсоида равными шарами

**Аннотация.** В статье рассматривается задача о построении тончайшего покрытия эллипсоида равными шарами, причем их центры должны лежать на эллипсоиде. Критерием оптимизации является минимизация радиуса покрывающих шаров. Подобные задачи возникают в приложениях, в частности, в медицине. Для решения задачи предложен эвристический алгоритм, основанный на интегрированном применении геодезической диаграммы Вороного на эллипсоиде и оптико-геометрической аналогии. Для оценки качества покрытия реализован численный метод расчета площади пересечения эллипсоида и шара. Проведены вычислительные эксперименты для различных эллипсоидов, найденные покрытия сравнивались с аналогичными покрытиями сфер, имеющих ту же площадь. Выполнено моделирование облучения поверхности опухоли сферическими радиационными лучами.

**Ключевые слова.** Тончайшее покрытие, покрытие эллипсоида, диаграмма Вороного, оптико-геометрическая аналогия, оптимизация, математическое моделирование.

**Информация о статье.** Дата поступления: 14 февраля 2025 г.; дата принятия к публикации: 11 июня 2025 г.; дата онлайн-размещения: 8 июля 2025 г.

Original article

D.M. Nguyen

*National Research Irkutsk State Technical University,  
Irkutsk, Russian Federation*

## Covering the Surface of an Ellipsoid with Equal Balls

**Abstract.** The article focuses on the problem of constructing the thinnest covering of an ellipsoid with equal balls whose centers belong to the ellipsoid. The optimization criterion is to minimize the radius of the covering balls. Such problems arise in applications, in particular, in medicine. To solve the problem, a heuristic algorithm is proposed based on the integrated using the Voronoi geodesic diagram on an ellipsoid and optical-geometric analogy. A numerical method for calculating the intersection area of an ellipsoid and a ball is implemented to assess the quality of the covering. Computational experiments were carried out for various ellipsoids. The found coverings were compared with similar coverings of spheres with the same area. Modeling of tumor surface irradiation with beams of gamma rays was performed.

**Keywords.** Thinnest covering, covering ellipsoid, Voronoi diagram, optical-geometric analogy, optimization, mathematical modeling.

**Article info.** Received 14 February, 2025; Accepted 11 June, 2025; Available online 8 July, 2025.

## Введение

Задачи построения оптимальных покрытий относятся к классическим задачам вычислительной геометрии [1]. Под покрытием заданного множества понимается такой набор геометрических объектов (как правило, однотипных), что множество принадлежит их объединению. Наиболее изученной среди них является задача покрытия простых геометрических фигур на плоскости равными кругами [2] и ее вариации [3; 4].

В настоящее время большой интерес ученых вызывает построение оптимальных покрытий поверхности равными шарами в трехмерном пространстве [5; 6], вызванный многочисленными приложениями, в частности, в медицине. Так, покрытия эллипсоида шарами применяется в настройке генераторов гамма-излучения для стереотаксической лучевой терапии при лечении опухолей головного мозга [7; 8]. Отметим, что в некоторых задачах, например, из области логистики, в качестве меры удаленности объектов рассматриваются не физическое (евклидово) расстояние между точками, а время перемещения между ними, что приводит к введению специальной неевклидовой (вариационной) метрики [9; 10].

Среди задач покрытия поверхностей наиболее изученной является задача покрытия сферы равными сферическими сегментами или, что эквивалентно, равными шарами с центрами на сфере. В работах [11; 12] представлены тончайшие покрытия сферы заданным количеством шаров, найденные методами математического программирования. Предложенный в [13] оптико-геометрический подход применяется для решения задачи покрытия и упаковки для сферы в [14; 15], в том числе, с неевклидовой метрикой.

Отметим, что пересечение сферы и эллипсоида есть пространственная кривая 4-ого порядка, что существенно усложняет построение покрытий шарами последнего. Тем не менее, в работах [16; 17] рассмотрены три задачи с эквивалентными свойствами: покрытие эллипсоида единичными шарами, покрытие эллипсоида шарами с радиусом  $\varepsilon > 0$  и покрытие эллипсоида очень маленькими эллипсоидами. Доказана теорема о том, что в  $d$ -мерном пространстве  $N(E_a^d) \geq K_a^d$ , где  $N(E_a^d)$  — логарифм минимального количества единичных шаров, необходимых для покрытия эллипсоида  $E_a^d$ ,  $E_a^d = \left\{ (x_1, x_2, \dots, x_d) \in R^d : \sum_{i=1}^d \frac{x_i^2}{a_i^2} \leq 1 \right\}$  и. В [8] формализована задача определения наименьшего количества шаров с заданными радиусом, которыми можно покрыть эллипсоид, на основе известной задачи о рюкзаке, предложен эвристический алгоритм ее решения. При это указано, что в некоторых вычислительных экспериментах шары не полностью покрыли поверхность.

Задачей данного исследования является отыскание тончайшего покрытия эллипсоида равными шарами. Для ее решения предложены эвристические алгоритмы, основанные на сочетании

геодезической диаграммы Вороного и оптико-геометрического подхода. Выполнены вычислительные эксперименты, проведено решение прикладной задачи из области медицины.

### Постановка задачи

Пусть в пространстве  $\mathbb{R}^3$  заданы поверхность  $(E) \subset \mathbb{R}^3$  — эллипсоид или сегмент эллипсоида и кусочно-непрерывная функция  $0 \leq f(x, y, z) \leq \beta$ , определяющая модуль скорости движения (мгновенную скорость) в каждой точке  $(x, y, z)$ . Если  $f(x_i, y_i, z_i) = 0$ , то точка  $(x_i, y_i, z_i)$  считается непроходимой. В качестве меры удаленности двух точек  $p, q$  будем рассматривать минимальное время перемещения между ними, которое определяется из решения задачи

$$\rho(p, q) = \min_{\Gamma \in G(p, q)} \int_{\Gamma} \frac{d\Gamma}{f(x, y, z)}, \quad (1)$$

где  $\Gamma$  — непрерывная кривая, соединяющая точки  $p$  и  $q$ ,  $G(p, q)$  — множество всех таких кривых. Нетрудно показать, что для  $\rho(p, q)$  выполняются аксиомы метрики. Таким образом, кратчайший маршрут между двумя точками есть кривая, на перемещение вдоль которой требуется наименьшее время [13]. Если  $f(x, y, z) = \text{const}$ , то имеем обычное евклидово расстояние.

Необходимо разместить заданное количество шаров  $C_i(O_i)$ ,  $i = 1, n$ , радиуса  $R$  с центрами  $O_i(x_i, y_i, z_i)$  так, чтобы поверхность  $(E)$  целиком лежала в объединении шаров, и указанный радиус был минимальным. Под радиусом шара в рассматриваемой задаче понимается время перемещения от центра шара до ограничивающей его сферы.

Таким образом, задача имеет вид

$$R \rightarrow \min, \quad (2)$$

$$\forall p \in (E), \exists i : \rho(O_i, p) \leq R, \quad (3)$$

$$O_i \in (E), i = \overline{1, n}, \quad (4)$$

где условие (3) гарантирует, что любая точка поверхности  $(E)$  принадлежит, по крайней мере, одному покрывающему шару, т.е. выполняется условие покрытия  $(E) \subseteq \bigcup_{i=1}^n C_i(O_i)$ . Минимальный радиус покрывающих шаров ограничен снизу величиной  $\sqrt{\frac{S_E}{4\pi n}}$ , где  $S_E$  — площадь эллипсоида. Данная оценка следует из условия полного покрытия  $4\pi R^2 n \geq S_E$  (суммарная площадь поверхностей покрывающих шаров не может быть меньше площади эллипсоида).

### О методе решения задач

Для решения задачи (2)–(4) предлагается подход, основанный на совместном использовании оптико-геометрической аналогии [13; 14] и обобщенной диаграммы Вороного. Использование диаграммы Вороного позволяет разбить задачу о покрытии поверхности шарами на задачи о покрытии сегмента поверхности одним шаром. Оптико-геометрическая аналогия используется для решения задачи (1), которая возникает как при построении диаграммы Вороного, так и при нахождении минимального покрывающего шара. Она основана на двух вариационных физических принципах — Ферма: свет в своем движении выбирает тот путь, который он проходит за минимальное время; и Гюйгенса: любая точка, достигнутая световой волной, становится источником сферических волн с аналогичными характеристиками. Поскольку свет распространяется одновременно и непрерывно по всем направлениям, и скорость распространения зависит только от оптической плотности среды, то найденное решение задачи (1) будет глобально оптимальным.

Как известно, классическую диаграмму Вороного для некоторого множества  $V$  можно построить относительно любого заданного конечного набора точек  $p_i, i = \overline{1, n}$ . Каждая ее ячейка  $V_i \in V$ , называемая зоной Дирихле, — это такое подмножество, в котором точки ближе к  $p_i$ , чем к любой другой точке:

$$V_i = \{x \in V : \|x - p_i\| \leq \|x - p_j\|, j = \overline{1, n}\}, \quad V = \bigcup_{i=1}^n V_i.$$

В рассматриваемом случае расстояние между точками не является евклидовым, а есть геодезическое расстояние на эллипсоиде. Для построения геодезической диаграммы Вороного необходимо вычислять расстояние между точками из решения задачи (1), где функция  $f$  зависит от криволинейных координат на эллипсоиде.

Для того чтобы найти центр шара, покрывающего каждую зону  $V_i$ , требуется определить Хаусдорфов центр зоны  $V_i$ , который является центром покрывающего шара минимального радиуса [14]. Алгоритм его нахождения описан далее.

Отметим, что оптимальность покрытия каждой зоны Дирихле не гарантирует оптимальности покрытия всей сферы. Тем не менее, можно построить итерационный алгоритм улучшения, сходящийся к локальному оптимуму.

### Построение диаграммы Вороного для эллипсоида

Пусть на эллипсоиде заданы  $n$  точек  $O_i = (x_i, y_i, z_i) \in (E), i = \overline{1, n}$ . Зоны Дирихле  $V_i$ , построенные относительно точек  $O_i$ , определяются как

$$V_i = \{p \in (E) : \rho(p, O_i) \leq \rho(p, O_j), \forall i \neq j\}.$$

Наиболее известным алгоритмом построения классической диаграммы Вороного является алгоритм Форчуна [18]. В рамках данного исследования предлагается обобщение оптико-геометрического подхода и алгоритма построения диаграммы Вороного для множества точек, лежащих на эллипсоиде.

Уравнение эллипсоида с центром в начале координат имеет вид

$$\begin{aligned} x &= a \sin \mu \cos \theta, \quad y = b \sin \mu \sin \theta, \quad z = c \cos \mu, \\ 0 &\leq \theta < 2\pi; \quad -\frac{\pi}{2} \leq \mu \leq \frac{\pi}{2}, \end{aligned} \quad (5)$$

где константы  $a, b, c$  — полуоси эллипсоида,  $\theta$  — долгота и  $\mu$  — широта.

Геометрическое расстояние  $ds$  определяется из решения уравнения

$$ds^2 = Hd\mu^2 + Gd\theta^2, \quad (6)$$

где значения  $H$  и  $G$  разные для каждого типа эллипсоида.

Рассмотрим двухосный эллипсоид [19], полуоси которого удовлетворяют условию  $a = b > c$ , тогда

$$H = \frac{a^2(1-d^2)^2}{(1-d^2\sin^2\mu)^3}, \quad G = \frac{a^2\cos^2\mu}{1-d^2\sin^2\mu}, \quad d = \frac{\sqrt{a^2-c^2}}{a}.$$

Для трехосного эллипсоида [20] с полуосями  $a > b > c$  параметры  $H$  и  $G$  определяются по следующим формулам:

$$H = H_\mu (h_y^2 \cos^2 \mu + h_z^2 \sin^2 \mu), \quad G = G_\theta (h_y^2 \cos^2 \mu + h_z^2 \sin^2 \mu),$$

$$H_\mu = \frac{b^2 \sin^2 \mu + c^2 \cos^2 \mu}{h_x^2 - h_y^2 \sin^2 \mu}, \quad G_\theta = \frac{a^2 \sin^2 \theta + b^2 \cos^2 \theta}{h_x^2 - h_z^2 \sin^2 \theta},$$

$$h_x = \sqrt{a^2 - c^2}, \quad h_y = \sqrt{b^2 - c^2}, \quad h_z = \sqrt{a^2 - b^2}.$$

Пусть кривая на эллипсоиде задается функцией  $\mu = \mu(\theta)$ , т.е. эллипсоидальная широта зависит от эллипсоидной долготы. Из (6) следует, что криволинейный элемент имеет вид  $ds = \sqrt{H(\mu')^2 + G}d\theta$ , где  $\mu' = \frac{d\mu}{d\theta}$ .

Следовательно, длина кривой  $\mu = \mu(\theta)$ ,  $\theta_0 \leq \theta \leq \theta_1$  определяется как

$$s = \int_{\theta_0}^{\theta_1} g(\theta, \mu, \mu') d\theta,$$

где  $g(\theta, \mu, \mu') = \sqrt{H(\mu')^2 + G}$ .

Пусть  $\theta_0 \neq \theta_1$ . Тогда  $\mu = \mu(\theta)$  удовлетворяет уравнению Эйлера-Лагранжа:  $\frac{d}{d\theta} \left( \frac{\partial g}{\partial \mu'} \right) - \frac{\partial g}{\partial \mu} = 0$ . Записывая полную производную, получим

$$\frac{\partial^2 g}{\partial \mu' \partial \mu'} \mu'' + \frac{\partial^2 g}{\partial \mu \partial \mu'} \mu'' + \frac{\partial^2 g}{\partial \theta \partial \mu'} - \frac{\partial g}{\partial \mu} = 0. \quad (7)$$

Подставляя выражение  $g(\theta, \mu, \mu') = \sqrt{H(\mu')^2 + G}$ , получаем

$$\frac{\partial g}{\partial \mu'} = \frac{H\mu'}{\sqrt{H(\mu')^2 + G}} \text{ и } \frac{\partial g}{\partial \mu} = \frac{H_\mu(\mu')^2 + G'}{2\sqrt{H(\mu')^2 + G}}, \quad (8)$$

где  $H_\mu = \frac{dH}{d\mu}$ ,  $G_\mu = \frac{dG}{d\mu}$ ,  $H_\theta = \frac{dH}{d\theta}$  и  $G_\theta = \frac{dG}{d\theta}$ .

Подставив соотношения (8) в уравнение (7), получаем

$$2HG\mu'' + HH_\theta(\mu')^3 - (2HG_\mu - H_\mu G)(\mu')^2 + (2H_\theta G - HG_\theta)\mu' - GG_\mu = 0.$$

Это нелинейное обыкновенное дифференциальное уравнение второго порядка с краевыми условиями

$$\mu(\theta_0) = \mu_0, \mu(\theta_1) = \mu_1.$$

Таким образом, геодезическое расстояние между двумя точками на эллипсоиде определяется из двухточечной краевой задачи. Для ее решения будем использовать итерационный алгоритм, предложенный в работах [19; 20].

Промежутки изменения координат  $\theta$  и  $\mu$  определяют конкретный вид поверхности (E): если  $0 \leq \theta < 2\pi$ ,  $-\frac{\pi}{2} \leq \mu \leq \frac{\pi}{2}$ , то (E) — эллипсоид, если  $0 < \theta_* \leq \theta \leq \theta^* < 2\pi$ ,  $-\frac{\pi}{2} < \mu_* \leq \mu \leq \mu^* < \frac{\pi}{2}$  различные сегменты эллипсоида.

**Алгоритм 1 построения «геодезической» диаграммы Вороного:**

Шаг 1: Вводится равномерная сетка на поверхности (5) с угловыми шагами  $\Delta\theta$  и  $\Delta\mu$ :  $E(\Delta\theta, \Delta\mu) \subset (E)$ . Шаг сетки выбирается в зависимости от размера эллипсоида и отношения его полуосей. В расчетах использовались  $\Delta\theta = \Delta\mu = 0,01 \text{ rad}$ . Шаг 2: Из каждой точки  $O_i \in E(\Delta\theta, \Delta\mu)$ ,  $i = \overline{1, n}$  выпускается световая волна. В результате определяем время достижения  $T_i(p)$  всех точек  $p \in E(\Delta\theta, \Delta\mu)$ . Это позволяет для каждой точки  $p$  найти вектор  $T(p) = \{T_i(p), i = \overline{1, n}\}$  —

времена, за которые в данную точку приходят волны, выпущенные из точек  $O_i$ .

Шаг 3: Для каждой точки  $p \in E(\Delta\theta, \Delta\mu)$  определяется номер волны, возможно, не единственный, которая первой достигла данной точки, и формируется множество  $D(p) = \{k : T_k(p) = \min_i T_i(p)\}$  номеров таких волн. Для каждой точки  $p$  множество  $D(p)$  содержит хотя бы один элемент.

Шаг 4: Определяются области Дирихле диаграммы Вороного  $V_i$  с центром  $O_i$  как  $V_i = \{p \in E(\Delta\theta, \Delta\mu) : i \in D(p)\}$ .

### Построение покрытия областей Дирихле диаграммы Вороного

Идея алгоритма основана на решении следующей смешанной экстремальной задачи: найти такую точку области Дирихле, из которой максимальное время достижения любой точки границы области минимально возможно (минимакс). Нахождение максимума гарантирует полное покрытие, а минимум — его оптимальность.

#### **Алгоритм 2 построения покрытия:**

Шаг 1: Случайным образом генерируются начальные координаты центров шаров  $O_i \in E(\Delta\theta, \Delta\mu), i = \overline{1, n}$ .

Шаг 2: С помощью алгоритма 1 строятся области Дирихле диаграммы Вороного  $V_i$  для каждой точки центра  $O_i$ .

Шаг 3: Для каждой области  $V_i$  определяются точки  $v_{i,k}, k = \overline{1, m}$  на границе  $\partial V_i$ :  $\partial V_i = \{v_{i,k} : k = \overline{1, m}\}$ .

Шаг 4: Из каждой точки  $v_{i,k}$  выпускаются световые волны по оптико-геометрическому алгоритму [13]. Для каждой точки  $p \in V_i$  определяется номер волны, которая первой достигла этой точки, и вычисляется затраченное на это время  $T(\theta, \mu) = \min_{k=\overline{1, m}} T_k(\theta, \mu)$ , где  $T_k(\theta, \mu)$  — время распространения световой волны из  $v_{i,k}$  до  $p$ .

Шаг 5: Определяются радиус и центр покрывающих шаров области  $V_i$ :

$$R_i = \max_{p \in V_i} T(\theta, \mu), O_i^* = \arg \max_{p \in V_i} T(\theta, \mu).$$

Шаги 3–5 выполняются независимо для каждой области  $V_i$ .

Шаг 6: Чтобы гарантировать полное покрытие шарами множества  $(E)$ , в качестве радиуса покрывающих шаров выбирается максимальный  $R = \max_{i=\overline{1, n}} R_i$ .

Шаг 7: Если  $\rho(O_i, O_i^*) < \delta, i = \overline{1, n}$ , где  $\delta$  — наперед заданный малый параметр, переходим к шагу 8, иначе переходим к шагу 2.

Шаг 8: Если найденный на текущей итерации радиус меньше предыдущего, он сохраняется в качестве решения задачи. Осуществляется переход к шагу 1 — производится новая генерация

начальных положений. Завершение работы алгоритма осуществляется при достижении заданного количества генераций.

В результате получаем набор равных шаров, объединение которых полностью покрывает поверхность (Е), а радиус шаров минимален.

### Пересечение эллипсоида и шара

Важным показателем близости аппроксимации к оптимальной служит величина плотности  $\Xi_n = \frac{\sum \Omega}{\Gamma}$  — отношение суммы площадей пересечения сферы и эллипсоида к площади эллипсоида. Чем меньше значение плотности  $\Xi_n$ , тем лучше покрытие. Отметим, что, в отличие от сферы, для нахождения площади эллипсоида не существует простой аналитической формулы.

Уравнение эллипсоида (5) в декартовых координатах имеет вид  $z = \pm \sqrt{c^2 - \frac{c^2 x^2}{a^2} - \frac{c^2 y^2}{b^2}}$ .

Пусть (Ф) — сегмент эллипсоида, лежащий внутри сферы (Θ). Сегмент (Ф) может состоять из двух частей, разделенных плоскостью  $Oxy$ : положительный сегмент (Ф<sup>+</sup>) при  $z \geq 0$  и отрицательный сегмент (Ф<sup>-</sup>) при  $z < 0$ . Пусть (Π<sup>+</sup>) и (Π<sup>-</sup>) — проекции на плоскость  $Oxy$  сегментов (Ф<sup>+</sup>) и (Ф<sup>-</sup>), соответственно. Проекция сегмента (Ф) представлена на рисунке 1б. Тогда площадь пересечения (Ф) определяется как поверхностный интеграл первого рода

$$\begin{aligned} \Omega &= \iint_{(\Phi)} d\Phi = \iint_{(\Pi^+)} \sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2} dydx + \iint_{(\Pi^-)} \sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2} dydx = \\ &= \iint_{(\Pi^+)} \Upsilon(x, y) dydx + \iint_{(\Pi^-)} \Upsilon(x, y) dydx, \end{aligned}$$

$$\text{где } \Upsilon(x, y) = \sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2} = \sqrt{1 + \frac{c^4 x^2}{a^4 z^2} + \frac{c^4 y^2}{b^4 z^2}} = \sqrt{1 + \frac{\frac{c^2 x^2}{a^4} + \frac{c^2 y^2}{b^4}}{1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}}}.$$

Площадь эллипсоида вычисляется по формуле

$$\Gamma = 8 \int_{x=0}^a \int_{y=0}^{b\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}} \sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2} dydx = 8 \int_{x=0}^a \int_{y=0}^{b\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}} \Upsilon(x, y) dydx.$$

Данные интегралы не могут быть получены в явном виде и вычисляются приближенно.



### Вычислительный эксперимент

Все алгоритмы реализованы на языке программирования C# на пакете Visual Studio 2022, вычисления производились на персональном компьютере с конфигурацией Intel(R) Core(TM) i5-3337U (частота 1.8 GHz, 4 CPUs, 6 GB RAM) и операционной системой Windows 10. Визуализация расчетов производилась среде MatLab, предоставляющей для этого гибкий и удобный инструментарий.

*Пример 1.* Требуется покрыть равными шарами эллипсоид  $(E)$ :  $\frac{x^2}{0.64} + \frac{y^2}{0.64} + \frac{z^2}{1} = 1$  в случае, когда метрика является евклидовой, т.е.  $f(x, y, z) = 1$ .

Поскольку до сих пор теоретических оценок для радиуса оптимальных покрытий для эллипсоида не получено, то покрытие эллипсоида сравнивается с покрытием сферы с такой же площадью. Такое сравнение позволит оценить качество построенных покрытий, так как оценки радиуса оптимального покрытия единичной сферы известны [21].

В табл. 1 приведены результаты расчетов. Здесь  $n$  — количество покрывающих шаров;  $R$  — наилучшие радиусы покрытий эллипсоида;  $R^*$  — оптимальный радиус кругов, покрывающих сферы с такой же площадью [21];  $\Delta = \frac{R - R^*}{R^*} 100\%$ ;  $\Xi$  — отношение суммы площадей покрытий к площади эллипсоида;  $t$  — время расчета (в секундах) для алгоритмов 1 и 2. Число случайных генераций начальных положений 80, величина  $\delta = 10^{-3}$ .

Из таблицы 1 видно, что радиус покрытия эллипсоида отличается от оптимального радиуса покрытия сферы, причем он может быть как больше, так и меньше, чем радиус покрытия сферы. При  $n = 7$  плотность покрытия минимальна, при  $n = 42$  — максимальна, а с ростом количества покрывающих шаров плотность стремится к 2. Покрытия с такой плотностью считаются хорошими. Теоретические оценки для плотности покрытия эллипсоида до настоящего времени не были получены, поэтому исследователи ориентируются на оценки для покрытия сферы равными шарами, которые варьируются в промежутке (1.23, 1.5) [21]. Покрытие эллипсоида шарами в случае  $n = 10, 11$  представлено на рис. 1.

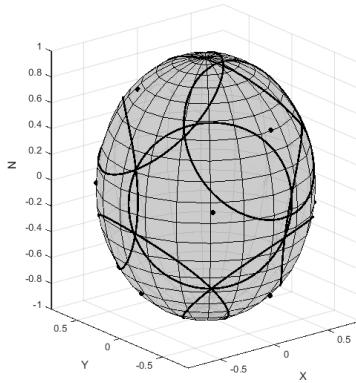
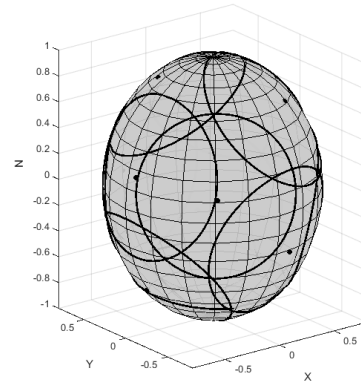
Таблица 1

Результаты покрытий эллипсоида в примере 1

$n$	$R$	$R^*$	$\Delta$	$\Xi$	$t$	$n$	$R$	$R^*$	$\Delta$	$\Xi$	$t$
4	1.0124	1.0655	-4.98	1.545	73.2	14	0.5576	0.5434	2.61	1.9875	205.1
5	0.9115	0.9582	-4.87	1.567	81.8	15	0.5400	0.5279	2.28	1.8480	219.3
6	0.8082	0.8282	-2.42	1.532	93.7	16	0.5043	0.5107	-1.25	1.8045	231.4
7	0.7834	0.7794	0.52	1.511	105.4	17	0.5161	0.4899	5.35	1.9940	239.8
8	0.7255	0.7298	-0.59	1.555	112.1	18	0.4858	0.4774	1.77	1.9012	249.0

Окончание табл. 1

$n$	$R$	$R^*$	$\Delta$	$\Xi$	$t$	$n$	$R$	$R^*$	$\Delta$	$\Xi$	$t$
9	0.6941	0.6977	-0.51	1.619	131.1	19	0.4808	0.4657	3.25	2.0120	261.5
10	0.6508	0.6393	4.03	1.710	145.4	20	0.4721	0.4542	3.95	2.0827	289.5
11	0.6362	0.6279	1.33	1.740	162.2	32	0.3703	0.3718	-0.39	2.0459	453.5
12	0.6148	0.5871	4.72	1.854	181.1	42	0.3262	0.3274	-0.36	2.1084	501.4
13	0.5905	0.5766	2.42	1.689	191.9	50	0.3000	0.2887	3.92	2.0118	550.8

 $n = 10$  $n = 11$ 

**Рис. 1. Покрытие эллипсоида в случае  $n = 10, 11$  в евклидовой метрике в примере 1.**

**Пример 2.** Рассматривается задача покрытия эллипсоида  $(E): \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{4} + \frac{z^2}{1} = 1$  в случае, когда метрика является неевклидовой. Пусть задана функция  $f(x, y, z) = \frac{1}{1 + |z|}$ .

Нетрудно заметить, что скорость распространения волны уменьшается при движении от экватора эллипсоида к полюсам по оси  $R$ , если центр покрывающего шара расположен на экваторе, волновой фронт — обычный эллипс; если центр покрывающего сегмента расположен в точке полюса, то волновой фронт — окружность; и центр покрывающих шаров стремится к двум полюсам. С другой стороны, шар с центром около экватора выглядит больше, чем шар с центром около полюсов.

В табл. 2 представлены результаты расчетов для различного числа покрывающих шаров. Здесь  $n$  — количество покрывающих шаров,  $R$  — наилучшие радиусы покрытий,  $t$  — время расчета (в секундах), для алгоритмов 1 и 2. Число случайных генераций начальных положений 80, величина  $\delta = 10^{-3}$ .

Таблица 2

Результаты покрытий эллипсоида в примере 2

$n$	$R$	$t$ (секунд)		$n$	$R$	$t$ (секунд)
5	2.7525	64.23		13	1.7781	84.56
6	2.4498	66.59		14	1.7057	86.14
7	2.2618	68.33		15	1.6646	90.36
8	2.1949	70.39		16	1.5642	93.48
9	2.0978	72.66		17	1.5114	97.60
10	1.955	74.07		18	1.4803	98.77
11	1.8491	76.41		19	1.4434	103.47
12	1.8166	80.20		20	1.3431	105.95

Из табл. 2 видно, что в этом примере радиусы больше, чем в примере 2 для того же количества сфер, так как скорость распространения волны в этой метрике меньше, чем в евклидовой.

*Пример 3.* Задача покрытия эллипсоида шарами возникает при настройке генераторов гамма-излучения для стереотаксической лучевой терапии при лечении опухолей головного мозга. Опухоли могут иметь неправильную форму, которая часто аппроксимируется эллипсоидом. Во время каждого сеанса лучевого лечения, врач облучает сферическими радиационными лучами поверхность опухоли. Требуется расположить лучи так, чтобы поверхностные участки опухоли подвергались равномерной дозе радиации, избегая случаев, когда некоторые участки облучаются избыточно, поскольку это оказывает негативное влияние на процесс лечения [7; 8]. В данном примере требуется расположить от 8 до 15 равных шаров, покрывающих всю поверхность опухоли с минимальной плотностью. Данные об опухоли взяты из диссертации [22].

На рисунке 5 показана опухоль головного мозга в трех проекциях, ее размер  $86.9 \times 47.7 \times 55.7$  (мм). Будем считать, что это эллипсоид с полуосями  $a = 43.45$  (мм),  $b = 23.85$  (мм) и  $c = 27.85$  (мм). В табл. 3 представлены результаты расчетов. Число случайных генераций начальных положений 50,  $\delta = 10^{-3}$ .

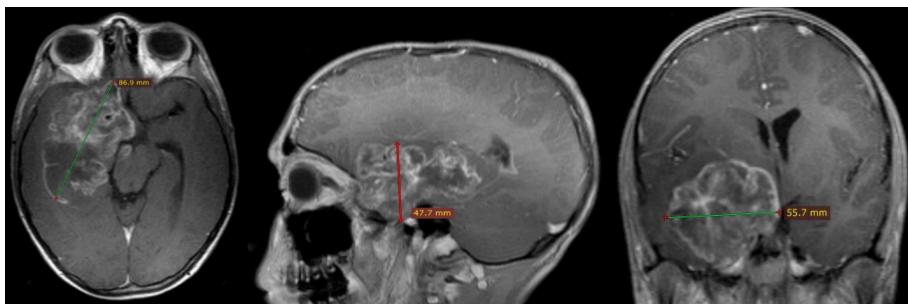


Рис. 2. Рентгеновский снимок опухоли

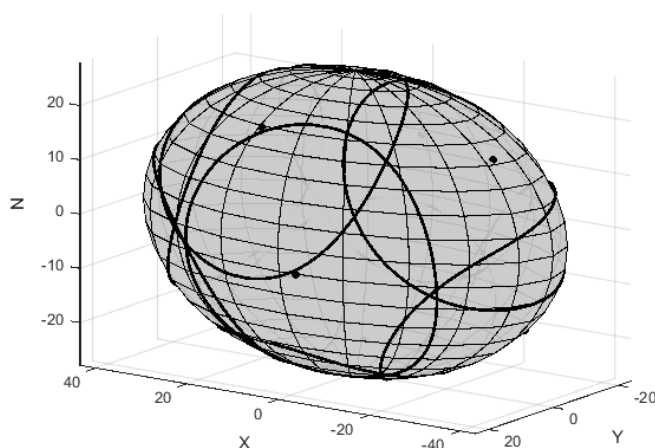


Рис. 3. Покрывтие эллипсоида 8 шарами

Таблица 3

## Результаты расчетов

$n$	$R$ (мм)	$\Xi$
8	26.93	1.3359
9	24.73	1.3829
10	23.53	1.4119
11	22.73	1.4900
12	21.45	1.5070
13	20.68	1.4931
14	20.38	1.6278
15	19.59	1.6149

Из табл. 3 можно видеть, что минимальная плотность покрытия  $\Xi_8 = 1.3359$  достигается при 8 покрывающих шарах. Таким образом, в рассматриваемом случае достаточно использовать 8 гамма-излучателей с радиусом  $R_8 = 26.93$  (мм) и положением проекции (см. рис. 3):

(5.43, -10.40, -24.81), (-33.36, 4.22, 17.14), (0.68, -21.61, 11.76),  
 (8.61, 16.49, 19.34), (-32.17, -7.13, -16.76) (40.77, -1.17, 9.52),  
 (-3.74, 23.46, -4.35), (35.14, -0.33, -16.36).

## Заключение

Рассмотрена задача покрытия эллипсоида и сегментов эллипсоида равными шарами, которая является существенно более сложной, чем классическая задача покрытия сферы. Главной особенностью, не позволяющей напрямую перенести использованные ранее подходы, является сложность вычисления геодезического

расстояния для двухосного и трехосного эллипсоидов. Аналитической формулы для этого не существует, для каждой пары точек требуется решать двухточечную краевую задачу для дифференциального уравнения второго порядка.

Для построения тончайших покрытий предложен алгоритм, основанный на геодезической диаграмме Вороного для эллипсоида и оптико-геометрическом подходе. Проведен вычислительный эксперимент по покрытию двухосных и трехосных эллипсоидов с евклидовой и неевклидовой метриками. Кроме того, для двухосного эллипсоида проведено сравнение с покрытием сферы аналогичной площади. Рассмотрена задача оптимальной настройки генераторов гамма-излучения при лечении опухолей мозга, которая сведена к построению покрытий эллипсоида заданным числом шаров. Полученные результаты оказались непротиворечивыми и вызвали интерес у специалистов-медиков.

Дальнейшие исследования в данном направлении, с одной стороны, могут быть связаны с рассмотрением других поверхностей второго порядка: гиперболоид, тор и т.д. С другой стороны, интерес представляет построение и исследование более точных моделей новообразований, например, в виде объединения нескольких эллипсоидов, с целью минимизации негативных последствий использования гамма-лучей в медицине.

### Список использованной литературы

1. Тот Л.Ф. Расположения на плоскости, на сфере и в пространстве / Л.Ф. Тот. — Москва : Физматлит, 1958. — 364 с.
2. Тахонов И.И. О некоторых задачах покрытия плоскости кругами / И.И. Тахонов. — EDN RXPVKN // Дискретный анализ и исследование операций. — 2014. — Т. 21, № 1. — С. 84–102.
3. Лебедев П.Д. Алгоритмы построения оптимального покрытия плоских фигур наборами кругов линейно различающихся радиусов / П.Д. Лебедев, К.Л. Стойчин // Известия Иркутского государственного университета. Серия Математика — 2023. — Т. 46. — С. 35–50.
4. Toth G.F. Miscellaneous Problems about Packing and Covering / G.F. Toth, L.F. Toth, W. Kuperberg // Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften. — Cham : Springer. — 2023. — Vol. 360. — P. 313–336.
5. Fu M. Lower Bounds on Lattice Covering Densities of Simplices / M. Fu, F. Xue, C. Zong. — DOI 10.1137/22M1514155 // SIAM Journal on Discrete Mathematics. — 2023 — Vol. 37, no. 3. — P. 1788–1804.
6. Bezdek K. From the Separable Tammes Problem to Extremal Distributions of Great Circles in the Unit Sphere / K. Bezdek, Z. Langi // Discrete Comput Geom. — 2023. — Vol. 72. — P. 269–309.
7. Liberti L. Optimal Configuration of Gamma Ray Machine Radiosurgery Units: the Sphere Covering Subproblem / L. Liberti, N. Maculan, Y. Zhang. — DOI 10.1007/s11590-008-0095-4 // Optimization Letter. — 2009. — Vol. 3 — P. 109–121.
8. The Discrete Ellipsoid Covering Problem: A Discrete Geometric Programming Approach / R.Q. do Nascimento, A.F.U. dos Santos Macambira, L.D.A.F. Cabral, R.V. Pinto. — DOI 10.1016/j.dam.2012.10.016 // Discrete Applied Mathematics. — 2014. — Vol. 164 — P. 276–285.

9. Лемперт А.А. Математическая модель и программная система для решения задачи размещения логистических объектов / А.А. Лемперт, А.Л. Казаков, Д.С. Бухаров. — EDN RDQAWV // Управление большими системами. — 2013. — № 41. — С. 270–284.
10. Казаков А.Л. Об одном численном методе решения некоторых задач оптимизации, возникающих в транспортной логистике / А.Л. Казаков, А.А. Лемперт, Д.С. Бухаров. — EDN NXNAWN // Вестник Иркутского государственного технического университета. — 2011. — № 6. — С. 6–12.
11. Fodor F. Covering the Sphere by Equal Zones / F. Fodor, V. Vigh, T. Zarnocz. — DOI 10.1007/s10474-016-0613-2 // Acta Math. Hungar. — 2016. — Vol. 149, no. 2. — P. 478–489.
12. Галиев Ш.И. Многократные упаковки и покрытия сферы / Ш.И. Галиев // Дискретная математика. — 1996. — Т. 8, № 3. — С. 148–160.
13. Казаков А.Л. Об одном подходе к решению задач оптимизации, возникающих в транспортной логистике / А.Л. Казаков, А.А. Лемперт. — EDN NXCWVD // Автоматика и телемеханика. — 2011. — Т. 72, № 7. — С. 50–57.
14. Казаков А.Л. Алгоритмы построения наилучших N-сетей в метрических пространствах / А.Л. Казаков, П.Д. Лебедев. — EDN YTFMJF // Автоматика и телемеханика. — 2017. — № 7. — С. 141–155.
15. Лемперт А.А. О задаче покрытия сферических фигур равными сферическими сегментами / А.А. Лемперт, П.Д. Лебедев, Д.М. Нгуен. — DOI 10.21538/0134-4889-2024-30-1-142-155. — EDN LTIMOY // Труды Института математики и механики УрО РАН. — 2024. — Т. 30, № 1. — С. 142–155.
16. Dumer I. Covering an Ellipsoid with Equal Balls / I. Dumer. — DOI 10.1016/j.jcta.2006.03.021 // Journal of Combinatorial Theory. — 2006. — Vol. 113. — P. 1667–1676.
17. Dumer I. On Coverings of Ellipsoids in Euclidean Spaces / I. Dumer, M.S. Pinsker, V.V. Prelov. — DOI 10.1109/TIT.2004.834759 // Journal of Combinatorial Theory, Series A. — 2004. — Vol. 50, no. 10. — P. 2348–2356.
18. Fortune S. A Sweep-line Algorithm for Voronoi Diagrams / S. Fortune // Algorithmica. — 1987. — Vol. 2. — P. 153–174.
19. Panou G. Solving the Geodesics on the Ellipsoid as a Boundary Value Problem / G. Panou, D. Delikaraoglou, R. Korakitis. — DOI 10.2478/jogs-2013-0007 // Journal of Geodetic Science. — 2013. — Vol. 3, no. 1. — P. 40–47.
20. Panou G. The Geodesic Boundary Value Problem and its Solution on a Triaxial Ellipsoid / G. Panou. — DOI 10.2478/jogs-2013-0028 // Journal of Geodetic Science. — 2013. — Vol. 3, no. 3. — P. 240–249.
21. Tarnai T. Covering a Sphere by Equal Circles, and the Rigidity of its Graph / T. Tarnai, Zs. Gaspar. — DOI 10.1017/S0305004100070134 // Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society. — 1991. — Vol. 110, no. 1. — P. 71–89.
22. Ким А.В. Рецидив нейроэпителиальных опухолей головного мозга у детей : дис. ... д-ра мед. наук : 14.01.18 / А.В. Ким. — Санкт-Петербург, 2020. — 373 с.

## References

1. Tot L.F. Locations on a plane, on a sphere and in space. Moscow, Fizmatlit Publ., 1958. 364 p.
2. Takhonov I.I. On Some Problems of Covering the Plane With Circles. *Diskretnyi analiz i issledovanie operatsii = Diskretnyi Analiz I Issledovanie Operatsii*, 2014, vol. 21, no. 1, pp. 84–102. (In Russian). EDN: RXPVKN.
3. Lebedev P.D., Stoichin K.L. Algorithms for Constructing Optimal Covering of Planar Figures with Disks Sets of Linearly Different Radii. *Izvestiya Irkutskogo gosudarstvennogo universiteta. Seriya: Matematika = The Bulletin of Irkutsk State University. Series: Mathematics*, 2023, vol. 46, pp. 35–50. (In Russian).



4. Toth G.F., Toth L.F., Kuperberg W. Miscellaneous Problems about Packing and Covering. *Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften*. Cham, Springer. 2023, vol. 360, pp. 313–336.
5. Fu M., Xue F., Zong C. Lower Bounds on Lattice Covering Densities of Simplices. *SIAM Journal on Discrete Mathematics*, 2023, vol. 37, no. 3, pp. 1788–1804. DOI: 10.1137/22M1514155.
6. Bezdek K., Langi Z. From the Separable Tammes Problem to Extremal Distributions of Great Circles in the Unit Sphere. *Discrete Comput Geom*, 2023, vol. 72, pp. 269–309.
7. Liberti L., Maculan N., Zhang Y. Optimal Configuration of Gamma Ray Machine Radiosurgery Units: the Sphere Covering Subproblem. *Optimization Letter*, 2009, vol. 3, pp. 109–121. DOI: 10.1007/s11590-008-0095-4.
8. do Nascimento R.Q., dos Santos Macambira A.F.U., Cabral L.D.A.F., Pinto R.V. The Discrete Ellipsoid Covering Problem: A Discrete Geometric Programming Approach. *Discrete Applied Mathematics*, 2014, vol. 164, pp. 276–285.
9. Lempert A.A., Kazakov A.L., Bukharov D.S. Mathematical Model and Program System for Solving a Problem of Logistic Objects Placement. *Upravlenie bol'shimi sistemami = Large-Scale Systems Control*, 2013, no. 41, pp. 270–284. (In Russian). EDN: RDQAWV.
10. Kazakov A.L., Lempert A.A., Bukharov D.S. On a Numerical Method to Solve Some Optimization Problems Occurring in Transport Logistics. *Vestnik Irkutskogo gosudarstvennogo tekhnicheskogo universiteta = Proceedings of Irkutsk State Technical University*, 2011, no. 6, pp. 6–12. (In Russian). EDN: NXNAWN.
11. Fodor F. Vigh V., Zarnocz T. Covering the Sphere by Equal Zones. *Acta Math. Hungar*, 2016, vol. 149, no. 2, pp. 478–489.
12. Galiev Sh.I. Multiple sphere packaging and coatings. *Diskretnaya matematika = Discrete mathematics*, 1996, vol. 8, no. 3, pp. 148–160. (In Russian).
13. Kazakov A.L., Lempert A.A. An Approach to Optimization in Transport Logistics. *Avtomatika i telemekhanika = Automation and Remote Control*, 2011, vol. 72, no. 7, pp. 50–57. (In Russian). EDN: NXCWVD.
14. Kazakov A.L., Lebedev P.D. Algorithms for Constructing Optimal N-Networks in Metric Spaces. *Avtomatika i telemekhanika = Automation and Remote Control*, 2017, no. 7, pp. 141–155. (In Russian). EDN: YTFMJF.
15. Lempert A.A., Lebedev P.D., Nguyen D.M. On the Problem of Covering Spherical Figures With Equal Spherical Caps. *Trudy Instituta matematiki i mekhaniki URO RAN = Proceedings of the Institute of Mathematics and Mechanics Ural Branch of RAS*, 2024, vol. 30, no. 1, pp. 142–155. (In Russian). EDN: LTIMOY. DOI: 10.21538/0134-4889-2024-30-1-142-155.
16. Dumer I. Covering an Ellipsoid with Equal Balls. *Journal of Combinatorial Theory*, 2006, vol. 113, pp. 1667–1676.
17. Dumer I., Pinsker M.S., Prelov V.V. On Coverings of Ellipsoids in Euclidean Spaces. *Journal of Combinatorial Theory, Series A*, 2004, vol. 50, no. 10, pp. 2348–2356.
18. Fortune S. A Sweep-line Algorithm for Voronoi Diagrams. *Algorithmica*, 1987, vol. 2, pp. 153–174.
19. Panou G., Delikaraoglou D., Korakitis R. Solving the Geodesics on the Ellipsoid as a Boundary Value Problem. *Journal of Geodetic Science*, 2013, vol. 3, no. 1, pp. 40–47. DOI: 10.2478/jogs-2013-0007.
20. Panou G. The Geodesic Boundary Value Problem and its Solution on a Triaxial Ellipsoid. *Journal of Geodetic Science*, 2013, vol. 3, no. 3, pp. 240–249. DOI: 10.2478/jogs-2013-0028.

21. Tarnai T., Gaspar Zs. Covering a Sphere by Equal Circles, and the Rigidity of its Graph. *Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society*, 1991, vol. 110, no. 1, pp. 71–89. DOI: 10.1017/S0305004100070134.

22. Kim A.V. Recurrence of neuroepithelial brain tumors in children . *Doct. Diss.* Saint Petersburg, 2020. 373 p.

### Информация об авторе

**Нгуен Дык Минь** — аспирант, институт информационных технологий и анализа данных, Иркутский национальный исследовательский технический университет, Иркутск, Российская Федерация, e-mail: nguyenducminh.mt@gmail.com.

### Information about the Author

**Minh D. Nguyen** — PhD Student, Institute of Information Technology and Data Analysis, Irkutsk National Research Technical University, Irkutsk, Russian Federation, e-mail: nguyenducminh.mt@gmail.com.

### Для цитирования

Нгуен Д.М. Покрытие эллипсоида равными шарами / Д.М. Нгуен. — DOI 10.17150/2713-1734.2025.7(2).274-289. — EDN ELVKJJ // System Analysis & Mathematical Modeling. — 2025. — Т. 7, № 2. — С. 274–289.

### For Citation

Nguyen D.M. Covering the Surface of an Ellipsoid with Equal Balls. *System Analysis & Mathematical Modeling*, 2025, vol. 7, no. 2, pp. 274–289. (In Russian). EDN: ELVKJJ. DOI: 10.17150/2713-1734.2025.7(2).274-289.