

Научная статья

УДК 517.929.2

EDN QVTBIF

DOI 10.17150/2713-1734.2025.7(2).263-273



П.Г. Сорокина

*Байкальский государственный университет,
г. Иркутск, Российская Федерация*

Минимизация невязки метода полиномиальных квазирешений для линейных дифференциально-разностных уравнений нейтрального типа

Аннотация. В работе предложен подход к улучшению метода полиномиальных квазирешений, апробированный ранее автором для начальной задачи с начальной точкой для линейных дифференциально-разностных уравнений различных типов с переменными коэффициентами, вопросы разрешимости которых в классе аналитических функций на сегодняшний день остаются открытыми. Суть метода заключается в представлении неизвестной функции в виде полинома некоторой степени N , подстановка которого в исходное уравнение приводит к невязке, имеющей точное аналитическое представление. Отметим, что метод полиномиальных квазирешений допускает введение в невязку свободных параметров. Это дает возможность сформулировать и изучить важную с прикладной точки зрения задачу о минимизации невязки на заданном интервале изменения независимой переменной.

В статье рассмотрена задача о минимизации невязки на примере начальной задачи с начальной точкой для линейных дифференциально-разностных уравнений нейтрального типа с линейными коэффициентами.

Ключевые слова. Линейные дифференциально-разностные уравнения, начальная задача, метод полиномиальных квазирешений, невязка.

Информация о статье. Дата поступления: 1 мая 2025 г.; дата принятия к публикации: 11 июня 2025 г.; дата онлайн-размещения: 8 июля 2025 г.

Original article

P.G. Sorokina

*Baikal State University,
Irkutsk, Russian Federation*

Minimization of the Residual of the Polynomial Quasisolutions Method for Linear Differential-Difference Equations of Neutral Type

Abstract. The paper proposes an approach to improving the polynomial quasi-solution method, previously tested by the author for an initial value problem with an initial point for linear differential-difference equations of various types with variable coefficients, the solvability of which in the class of analytic functions remains open today. The essence of the method lies in representing the unknown function as a polynomial of some degree N , the substitution of which into the original equation leads to a residual that has an exact analytical representation. Note that the polynomial quasi-solution method allows the introduction of free parameters into the residual. This makes it possible to formulate and study the problem of minimizing the residual on

a given interval of variation of the independent variable, which is important from an applied point of view.

The article considers the problem of minimizing the residual using the example of an initial value problem with an initial point for linear differential-difference equations of neutral type with linear coefficients.

Keywords. Linear differential difference equations, initial-value problem, polynomial quasisolutions method, residual.

Article info. Received 1 May, 2025; Accepted 11 June, 2025; Available online 8 July, 2025.

1. Введение

В большинстве случаев исследование какого-либо явления с использованием математических методов сводится к анализу дифференциальных уравнений различной структуры. Класс функционально-дифференциальных уравнений (ФДУ) позволяет учитывать влияние предыдущего состояния на решения изучаемого явления. В этом классе наиболее исследованными и находящими применение на практике являются дифференциально-разностные уравнения (ДРУ), когда отклонение аргумента постоянно [1–3]. При изучении решений начальной задачи для линейных дифференциальных уравнений (ЛДРУ) активно применяется метод последовательного интегрирования, известный как метод шагов. В результате решение ЛДРУ сводится к серии задач Коши для обыкновенных дифференциальных уравнений, не содержащих запаздывания. Если обыкновенные дифференциальные уравнения, полученные данным способом, удовлетворяют условиям существования единственного решения для начальной задачи, то, и решение рассматриваемого дифференциально-разностного уравнения также будет единственным. С другой стороны, известно, что, как правило, в точках, кратных запаздыванию, решение имеет разрывную производную. На практике большой интерес представляют непрерывные решения, обладающие достаточной степенью гладкости на интервалах, превышающих запаздывания. В связи с этим, в исследовании внимание акцентируется на начальной задаче с начальной точкой на примере ЛДРУ нейтрального типа.

2. Предварительные сведения

2.1. Метод полиномиальных квазирешений

Рассмотрим начальную задачу с начальной точкой для ЛДРУ нейтрального типа с линейными коэффициентами

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) + (p_0 + p_1 t)\dot{x}(t-1) &= (a_0 + a_1 t)x(t-1) + \bar{f}(t), \\ t \in R, x(0) &= x_0, \end{aligned} \quad (1)$$

где $p_0, p_1, a_0, a_1 - \text{const}$ и

$$\bar{f}(t) = \sum_{n=0}^F \bar{f}_n t^n.$$

Для нахождения решений начальной задачи (1), обладающих достаточной степенью гладкости, применяется метод полиномиальных квазирешений (ПК-решений), изложенный автором ранее в работах [4–7] для различных типов ЛДРУ с переменными коэффициентами. Приведём ниже основные положения метода в тезисной форме.

Поскольку условия разрешимости данной задачи в классе аналитических функций на сегодняшний день остаются открытыми [4–10], то решение неизвестной функции представляется в виде полинома

$$x(t) = \sum_{n=0}^N x_n t^n. \quad (2)$$

В этом случае для $x(t)$ имеем:

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= \sum_{n=0}^N x_n t^{n-1}, \quad x(t-1) = \sum_{n=0}^N x_n (t-1)^n = \sum_{n=0}^N \tilde{x}_n t^n, \\ \dot{x}(t-1) &= \sum_{n=0}^N n \tilde{x}_n t^{n-1}, \end{aligned} \quad (3)$$

где

$$\begin{aligned} \tilde{x}_n &= x_n + \sum_{i=1}^{N-n} \bar{C}_{n+i}^i x_{n+i}, \quad n = \overline{0, N-1}; \\ \tilde{x}_n &= x_n; \quad \bar{C}_n^m = (-1)^m \frac{n!}{m!(n-m)!}. \end{aligned} \quad (4)$$

После подстановки (2)–(4) и сравнения степеней при одинаковых степенях t^n следует: для того, чтобы последний коэффициент x_N в (2) определялся последним, заданным формулой (1), коэффициентом \bar{f}_F , необходимо, чтобы в (2) $N = F + 1$.

Определим функцию $f(t)$ в виде

$$f(t) = \sum_{n=0}^F f_n t^n + \Delta(t), \quad (5)$$

где $f_i = \bar{f}_i, i = \overline{0, F}$ — известные коэффициенты, а невязка $\Delta(t) = f_N t^N + f_{N+1} t^{N+1}$, f_N и f_{N+1} — некоторые неизвестные коэффициенты.

Определение 1. Задачу

$$\dot{x}(t) + p(t)\dot{x}(t-1) = a(t)x(t-1) + f(t), \quad t \in R, \quad x(0) = x_0, \quad (6)$$

где $p(t) = p_0 + p_1 t$, $a(t) = a_0 + a_1 t$, p_0, p_1, a_0, a_1 — const, будем называть согласованной по размерности полиномов относительно задачи (1).

Замечание 1. Поскольку степень полинома $x(t)$ равна $F + 1$, это позволяет выбрать степень полинома $\bar{f}(t)$ в (5) в зависимости от желаемой степени полинома $x(t)$, добавляя к $\bar{f}(t)$ соответствующее число нулевых членов.

Определение 2. Если существует полином степени $N = F + 1$

$$x(t) = \sum_{n=0}^N x_n t^n, \quad t \in R,$$

тождественно удовлетворяющий задаче (6), то этот полином будем называть *полиномиальным квазирешением* задачи (1).

В работах [4–7] приведён алгоритм вычисления ПК-решений, сформулированы и доказаны теоремы существования и единственности.

Таким образом, суть метода заключается в представлении неизвестной функции в виде полинома $x(t) = \sum_{n=0}^N x_n t^n$ (формальное решение), подстановка которого в уравнение приводит к соответствующей невязки $\Delta(t)$, имеющей точное аналитическое представление. Оценка этой невязки является важным критерием практического применения метода ПК-решений.

2.2. Зависимость структуры ПК-решений от спектра корней характеристического квазиполинома для ЛДРУ с постоянными коэффициентами

Отметим, что для соответствующего ЛДРУ с постоянными коэффициентами

$$\dot{x}(t) + p_0 \dot{x}(t-1) = a_0 x(t-1), \quad t \in R \quad (7)$$

применим классический метод Эйлера, приводящий к характеристическому квазиполиному

$$e^k = \frac{a_0}{k} - p_0, \quad (8)$$

имеющему бесконечное множество корней на комплексной плоскости. Каждый из этих корней порождает точное аналитическое решение уравнения (7) [7, с. 215–216]: определенные значения параметров a_0, p_0 соответствуют областям существования одного, двух, трех вещественных корней.

На основании численных экспериментов в работах [4–7] установлена зависимость структуры ПК-решений для (1) от спек-

тра корней характеристического квазиполинома (8). На основании этой зависимости введено понятие ε — притяжимости [6, с. 68].

Определение. Под ε — притяжимостью ПК-решений на некотором отрезке $[t_0, t_1]$ будем понимать свойство взаимного притяжения последовательности ПК-решений, порождаемых увеличением степени N , т.е. существует такое N_* , при котором для всех $N \geq N_*$ и заданного ε справедливо неравенство

$$|x_{N+i}(t) - x_{N+i-1}(t)| < \varepsilon, \quad i = 1, 2, \dots, k, \quad \forall t \in [t_0, t_1].$$

Наличие ε — притяжимости позволяет установить корректность постановки начальных и краевых условий исследуемых задач.

В следующем разделе будет изложен подход к улучшению метода ПК-решений. Наличие в невязке свободных параметров даёт возможность сформулировать и изучить важную с прикладной точки зрения задачу о минимизации невязки на заданном интервале изменения независимой переменной.

3. Основные результаты

Рассмотрим задачу о минимизации невязки на примере начальной задачи (1). Будем искать полиномиальное квазирешение порядка m в виде полинома

$$x(t) = \sum_{n=0}^N x_n t^n, \quad N = F + 1 + m. \quad (9)$$

Тогда задача, согласованная по размерности полиномов запишется в виде

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) + (p_0 + p_1 t)\dot{x}(t-1) &= (a_0 + a_1 t)x(t-1) + f(t), \\ t \in R, x(0) &= x_0. \end{aligned} \quad (10)$$

Здесь

$$f(t) = \sum_{n=0}^F f_n t^n + \Delta(t),$$

где $f_i = \overline{f_i}, i = \overline{0, F}$, а $\Delta(t) = \sum_{n=F+1}^{N+1} f_n t^n$, $f_i, i = \overline{F+1, N+1}$ — неизвестные коэффициенты.

Выберем в качестве свободных параметров коэффициенты $f_{N-i}, i = \overline{1, m} (N - m > F)$ и положим $f_{N-m+s} = 0, s = \overline{1, m-1}$. Следуя алгоритму доказательства теоремы существования ПК-решений [4–7] для коэффициентов $f_{N+2-i}, i = \overline{1, m+2}$, получаем систему алгебраических уравнений с основными переменными f_N и f_{N+1} ,

единственное решение системы определится по правилу Крамера формулами

$$f_{N-1}^* = \frac{D_1}{D}, f_{N-2}^* = \frac{D_2}{D}, \dots, f_{N-m}^* = \frac{D_m}{D}.$$

Это в свою очередь позволяет согласно (12) найти выражение для невязки $\Delta^*(t) = \Psi^*(t, f_{N-1}^*, \dots, f_{N-m}^*)$ и в силу (13) минимальное значение функционала

$$G^* = \min_{[t_1, t_2]} G(f_{N-1}, f_{N-2}, \dots, f_{N-m}) = \int_{t_1}^{t_2} [\Delta^*(t)]^2 dt.$$

С другой стороны, по формулам (11) определяются коэффициенты f_N^* и f_{N+1}^* , что в соответствии с теорией, представленной в работах [4–7], даёт возможность вычислить коэффициенты $x_n, n = \overline{1, N}$, и, следовательно, найти ПК-решение исследуемой задачи в виде полинома (9).

Пример. Положим в задаче (1) $p(t) = a(t) = 1 + t$, $\bar{f}(t) \equiv 0$ и перепишем ее в виде

$$\dot{x}(t) + (1+t)\dot{x}(t-1) = (1+t)x(t-1), \quad t \in R, \quad x(0) = x_0. \quad (15)$$

Рассмотрим дифференциально-разностное уравнение с постоянными коэффициентами

$$\dot{x}(t) + \dot{x}(t-1) = x(t-1), \quad t \in R.$$

Опираясь на исследования в работе [4], значения $p_0 = a_0 = 1$ модельного уравнения этой задачи лежат в области существования единственного вещественного корня характеристического квази-полинома (8). Поэтому для нахождения ПК-решений задачи (15) достаточно задания одного начального условия в виде $x(0) = x_0 = 1$.

В работе [3] для начальной задачи (15) получены следующие ПК-решения и соответствующие им невязки $\Delta_N(t)$:

$$x_4(t) = 1 + 0.4669t + 0.1789t^2 + 0.0778t^3 + 0.0350t^4,$$

$$\Delta_4(t) = 0.1673t^4 - 0.0350t^5;$$

$$x_5(t) = 1 + 0.5007t + 0.2530t^2 + 0.0452t^3 - 0.0426t^4 - 0.0229t^5,$$

$$\Delta_5(t) = -0.1635t^5 + 0.0229t^6;$$

$$x_6(t) = 1 + 0.5295t + 0.0229t^2 - 0.0585t^3 + 0.0171t^4 + 0.0468t^5 + 0.0149t^6,$$

$$\Delta_6(t) = 0.1180t^6 - 0.0149t^7.$$

Введем функционал

$$G_N = \int_{-1}^1 [\Delta_N(t)]^2 dt.$$

Тогда

$$G_4 = \int_{-1}^1 [\Delta_4(t)]^2 dt = 0.00644, G_5 = \int_{-1}^1 [\Delta_5(t)]^2 dt = 0.00494, \\ G_6 = \int_{-1}^1 [\Delta_6(t)]^2 dt = 0.00217. \quad (16)$$

Исследуем вопрос минимизации невязки $\Delta(t)$ ПК-решения шестого порядка на отрезке $[-1, 1]$. Для этого выберем в качестве свободного параметра коэффициент f_5 . В этом случае линейная система (14) для коэффициентов f_5, f_6 и f_7 перепишется в виде

$$\begin{cases} -191f_5 - 1320f_6 - 10459f_7 = 1, \\ -148f_5 - 1013f_6 - 8042f_7 = 1. \end{cases} \quad (17)$$

Разрешая систему относительно коэффициентов f_6 и f_7 , получаем

$$f_6 = 0.1180 + 0.5817f_5, \quad f_7 = -0.0149 - 0.0916f_5.$$

Определим согласно (13) функционал

$$G(f_5) = \int_{-1}^1 (f_5 t^5 + f_6 t^6 + f_7 t^7)^2 dt = \\ = 2.1717 \cdot 10^{-3} + 1.6899 \cdot 10^{-2} f_5 + 0.2068 \cdot f_5^2.$$

Вычислим производную функционала и приравняем ее к нулю:

$$\frac{dG(f_5)}{df_5} = 1.6899 \cdot 10^{-2} + 0.4136f_5 = 0.$$

Отсюда находим, что минимум функционала достигается при $f_5 = -0.0408$. Тогда из (17) определяем численные значения коэффициентов f_6 и f_7 :

$$f_6 = 0.0943, \quad f_7 = -0.0112.$$

Следовательно, невязка $\Delta_6^*(t)$ имеет следующее аналитическое представление:

$$\Delta_6^*(t) = -0.0408t^5 + 0.0943t^6 - 0.0112t^7.$$

Найденные таким образом коэффициенты f_5, f_6 и f_7 позволяют вычислить, ПК-решение исследуемой задачи

$$x_6^*(t) = 1 + 0.5223t + 0.1745t^2 - 0.0326t^3 + 0.0022t^4 + 0.0294t^5 + 0.0112t^6.$$

В соответствии с (11) вычисляем значение функционала

$$G_6^* = \int_{-1}^1 [\Delta_6^*(t)]^2 dt = 0.00182.$$

Сравнивая это значение функционала со значениями, приведенным в (16), приходим к заключению, что процесс минимизации невязки позволяет улучшить качество ПК-решений. Отметим, что с увеличением степени полинома процесс минимизации невязки становится более результативным.

Заключение

В статье, с целью улучшения качества метода ПК-решений, была рассмотрена задача минимизации невязки на примере начальной задачи с начальной точкой для линейных дифференциально-разностных уравнений нейтрального типа с линейными коэффициентами. На основании полученных результатов проведен численный эксперимент, в котором изложен процесс минимизация невязки. Предложенный подход показал свою эффективность. Данные результаты могут быть использованы в дальнейшем для улучшения качества метода полиномиальных квазирешений для линейных дифференциально-разностных уравнений различных типов с переменными коэффициентами.

Список использованной литературы

1. Мышкис А.Д. Линейные дифференциальные уравнения с запаздывающим аргументом / А.Д. Мышкис. — Москва, 1951. — 351 с.
2. Беллман Р. Дифференциально-разностные уравнения / Р. Беллман, К.Л. Кук. — Москва : Мир, 1967. — 548 с.
3. Пинни Э. Обыкновенные дифференциально-разностные уравнения / Э. Пинни. — Москва : Изд-во иностр. лит., 1961. — 248 с.
4. Ермолаева П.Г. Исследование линейных дифференциально-разностных уравнений методом полиномиальных квазирешений. / П.Г. Ермолаева. — EDN MNHVBX // Вестник Пермского университета. Математика. Механика. Информатика. — 2007. — № 7. — Р. 13–20.
5. Cherepennikov V.B. Polynomial quasisolutions of linear differential difference equations with different delays / V.B. Cherepennikov, P.G. Ermolaeva // Functional Differential Equations. — 2007. — Vol. 14, no. 1. — P. 47–66.
6. Черепенников В.Б. Численный эксперимент в исследовании полиномиальных квазирешений линейных дифференциально-разностных уравнений / В.Б. Черепенников, П.Г. Ермолаева. — EDN JHCZSX // Известия высших учебных заведений. Математика. — 2008. — № 7. — С. 57–72.
7. Черепенников В.Б. Гладкие решения начальной задачи для некоторых дифференциально-разностных уравнений / В.Б. Черепенников, П.Г. Ермолаева. — EDN MLKIZD // Сибирский журнал вычислительной математики. — 2010. — Т. 13, № 2. — С. 213–226.
8. Скубачевский А.Л. Об обобщенных решениях второй краевой задачи для дифференциально-разностных уравнений с переменными коэффициентами / А.Л. Скубачевский, Н.О. Иванов. — DOI 10.22363/2413-3639-2021-67-3-576-595. — EDN FAUQW // Современная математика. Фундаментальные направления. — 2021. — Т. 67, № 3. — С. 576–595.

9. Düz M. Solutions to Differential-Differential Difference Equations with Variable Coefficients by Using Fourier Transform Method / M. Düz, S. Avezov, Ah. Issa // Süleyman Demirel University. — 2023. — Vol. 18, no. 3. — P. 259–267.

10. Ayşe Kurt. Fibonacci Collocation Method for Solving Linear Differential — Difference Equations / Ayşe Kurt, Salih Yalçınbaş, Mehmet Sezer // Mathematical and Computational Applications. — 2013. — Vol. 18, no. 3. — P. 448–458.

References

1. Myshkis A.D. Linear differential equations with retarded argument. Moscow, 1951. 351 p.

2. Beilman R., Cooke K.L. *Differential-Difference Equations*. New York, Academic Press, 1963. 462 p. (Russ. ed.: Beilman R., Cooke K.L. *Differential-Difference Equations*. Moscow, Mir Publ., 1967. 548 p.).

3. Pinney E. *Ordinary Difference-Differential Equations*. Berkeley-Los Angeles, Univ. of California press, 1958. 262 p. (Russ. ed.: Pinney E. *Ordinary Difference-Differential Equations*. Moscow, Inostrannaya literature Publ., 1961. 248 p.).

4. Ermolaeva P.G. Investigation of Linear Differential-Difference Equations by the Polynomial Quasisolutions Method. *Vestnik Permskogo universiteta. Matematika. Mekhanika. Informatika* = *Bulletin of Perm University. Mathematics. Mechanics. Computer Science*, 2007, no. 7, pp. 13–20. (In Russian). EDN: MNIHVX.

5. Cherepennikov V.B., Ermolaeva P.G. Polynomial Quasisolutions of Linear Differential Difference Equations with Different Delays. *Functional Differential Equations*, 2007, vol. 14, no. 1, pp. 47–66.

6. Cherepennikov V.B., Ermolaeva P.G. Numerical experiment in the study of polynomial quasi-solutions of linear differential-difference equations. *Izvestiya vysshikh uchebnykh zavedenii. Matematika* = *Russian Mathematics*, 2008, no. 7, pp. 57–72. (In Russian). EDN: JHCZSX.

7. Cherepennikov V.B., Ermolaeva P.G. Smooth Solutions of an Initial-Value Problem for Some Differential Difference Equations. *Sibirskij zhurnal vychislitel'noj matematiki* = *Siberian Journal of Numerical Mathematics*, 2010, vol. 13, no. 2, pp. 213–226. (In Russian). EDN: MLKIZD.

8. Skubachevskii A.L., Ivanov N.O. On Generalized Solutions of the Second Boundary-Value Problem for Differential-Difference Equations with Variable Coefficients. *Sovremennaya matematika. Fundamental'nye napravleniya* = *Contemporary Mathematics. Fundamental Directions*, 2021, vol. 67, no. 3, pp. 578–595. (In Russian). EDN: FAUQW. DOI: 10.22363/2413-3639-2021-67-3-576-595.

9. Düz M., Avezov S., Issa Ah. Solutions to Differential-Differential Difference Equations with Variable Coefficients by Using Fourier Transform Method. *Süleyman Demirel University*, 2023, vol. 18, no. 3, pp. 259–267.

10. Ayşe Kurt, Salih Yalçınbaş, Mehmet Sezer. Fibonacci Collocation Method for Solving Linear Differential — Difference Equations. *Mathematical and Computational Applications*, 2013, vol. 18, no. 3, pp. 448–458.

Информация об авторе

Сорокина Полина Геннадьевна — старший преподаватель, кафедра математических методов и цифровых технологий, Байкальский государственный университет, г. Иркутск, Российская Федерация, e-mail: ermolaeva_polina@mail.ru.

Information about the Author

Polina G. Sorokina — Senior Lecturer, Department of Mathematics and Digital Technologies, Baikal State University, Irkutsk, Russian Federation, e-mail: ermolaeva_polina@mail.ru.

Для цитирования

Сорокина П.Г. Минимизация невязки метода полиномиальных квази-решений для линейных дифференциально-разностных уравнений нейтрального типа / П.Г. Сорокина. — DOI 10.17150/2713-1734.2025.7(2).263-273. — EDN QVTBIF // System Analysis & Mathematical Modeling. — 2025. — Т. 7, № 2. — С. 263–273.

For Citation

Sorokina P.G. Minimization of the Residual of the Polynomial Quasisolutions Method for Linear Differential-Difference Equations of Neutral Type. *System Analysis & Mathematical Modeling*, 2025, vol. 7, no. 2, pp. 263–273. (In Russian). EDN: QVTBIF. DOI: 10.17150/2713-1734.2025.7(2).263-273.