

Научная статья
УДК 519.213
EDN GWUEQX
DOI 10.17150/2713-1734.2025.7(1).97-110



А.В. Боровский

*Байкальский государственный университет,
г. Иркутск, Российская Федерация*

А.В. Воронов

*Байкальский государственный университет,
г. Иркутск, Российская Федерация*

А.А. Юменчук

*Байкальский государственный университет,
г. Иркутск, Российская Федерация*

А.Л. Галкин

*Институт общей физики им. А.М. Прохорова
Российской академии наук,
г. Москва, Российская Федерация*

Коэффициенты асимметрии и эксцесса для плотности вероятностей Вейбулла

Аннотация. Рассмотрены вероятностные характеристики для распределения вероятностей Вейбулла. Вычислены положение и величина максимума плотности вероятностей Вейбулла. Вычислена ширина для плотности вероятностей на полувысоте. Показано, что она линейно зависит от параметра ширины функции и нелинейно зависит от параметра формы функции Вейбулла. Аналитически вычислены моменты для плотности вероятностей, дисперсия, среднеквадратичное отклонение, коэффициенты асимметрии и эксцесса. Построены графики для плотности вероятностей Вейбулла в зависимости от параметра формы. Проведено сравнение плотности вероятностей Вейбулла и нормального распределения при разных значениях параметров формы и ширины. Представлено применение распределения Вейбулла в медицинской статистике выздоровлений от Covid-19.

Ключевые слова. Распределение Вейбулла, коэффициенты асимметрии и эксцесса, ширина и моменты плотности вероятностей, аппроксимация медицинской статистики.

Информация о статье. Дата поступления: 27 января 2025 г.; дата принятия к публикации: 11 марта 2025 г.; дата онлайн-размещения: 15 апреля 2025 г.

A.V. Borovsky*Baikal State University,
Irkutsk, Russian Federation***A.V. Voronov***Baikal State University,
Irkutsk, Russian Federation***A.A. Yumenchuk***Baikal State University,
Irkutsk, Russian Federation***A.L. Galkin***Prokhorov General Physics Institute
of the Russian Academy of Sciences,
Moscow, Russian Federation*

The Coefficient of Asymmetry and the Access for the Weibull Probability Density

Abstract. Probabilistic characteristics for the Weibull probability distribution are considered. The position and magnitude of the maximum of the Weibull probability density are calculated. The width for the probability density at half height is calculated. It is shown that it linearly depends on the parameter of the width of the function and non-linearly depends on the parameter of the shape of the Weibull function. The moments for the probability density, dispersion, standard deviation, coefficient of asymmetry, and access have been analytically calculated. Graphs are constructed for the Weibull probability density depending on the shape parameter. The Weibull probability density and the normal distribution are compared for different values of the shape and width parameters. The application of the Weibull distribution in medical statistics of Covid-19 recoveries is presented.

Keywords. Weibull distribution, coefficients of asymmetry and access, width and moments of probability density, approximation of medical statistics.

Article info. Received 27 January, 2025; Accepted 11 March, 2025; Available online 15 April, 2025.

В теории вероятностей известно распределение вероятностей Вейбулла [1]. Оно используется в исследованиях по гидрологии и климату [2], в теории надежности машин и механизмов, в электронике и электротехнике [3-6], в медицине [7]. Это распределение вероятностей обладает плотностью вероятностей, которая начинается в некоторой точке, например, в нуле, и далее имеет колоколообразную форму. Такая форма плотности вероятностей как раз и встречается в указанных выше научных сферах. Именно поэтому распределение Вейбулла представляет интерес для многих научных и инженерных приложений.

Интеграл от плотности вероятностей Вейбулла равен 1, а само подынтегральное выражение зависит от трех параметров, определение которых составляет задачу интерпретации статистических данных.

Удобным теоретическим фактором является также то, что распределение вероятностей Вейбулла, т.е. интеграл с переменной верхней границей от плотности вероятностей, имеет вид экспоненциального стремления к единице. Такой вид зависимости возникает во многих физических задачах, учитывающих насыщение. Примером может служить накачка активной среды в лазерной физике [8], или выход на квазистационарный режим в теории эпидемий [9].

Удивительным является отсутствие сведений о распределении Вейбулла в известных справочниках по математике [10-12]. В частности, мы не нашли сведений о ширине, коэффициентах асимметрии и эксцесса плотности вероятностей Вейбулла. В связи с этим, авторы решили посвятить распределению Вейбулла данную статью.

Общий вид плотности вероятностей Вейбулла следующий

$$g(t'; \lambda, k, c) = (k/\lambda)((t' - c)/\lambda)^{(k-1)} e^{-((t' - c)/\lambda)^k}. \quad (1)$$

Здесь λ, k, c — параметры ширины, формы и смещения функции (1). Сделаем замену переменных

$$t' - c = t, \quad (2)$$

которая приводит плотность вероятностей Вейбулла к стандартному виду

$$g(t; \lambda, k) = (k/\lambda)(t/\lambda)^{(k-1)} e^{-(t/\lambda)^k}. \quad (3)$$

Смещение переменной t никак не влияет ни на форму, ни на высоту функции и связано только с изменением положения функции относительно системы координат. Далее будем рассматривать функцию (3). Графики функции (3) для различных значений степени k представлены на рис. 1.

Проинтегрируем функцию (3)

$$G(t; \lambda, k) = \int_0^t g(t; \lambda, k) dt = - \int_0^t d e^{-(t/\lambda)^k} = 1 - e^{-(t/\lambda)^k}. \quad (4)$$

Формула (4) определяет распределение вероятностей Вейбулла. Отметим, что интеграл по всему диапазону от 0 до ∞ равен $G(\infty, \lambda, k) = 1$.

Найдем точку максимума функции Вейбулла и величину максимума. Для этого вычислим производную от функции (3)

$$\begin{aligned} \frac{dg}{dt} &= \left(\frac{k}{\lambda}\right) \frac{d}{dt} \left(\frac{t}{\lambda}\right)^{(k-1)} e^{-(t/\lambda)^k} = \\ &= (k/\lambda) \left\{ [(k-1)(t/\lambda)^{(k-2)} (1/\lambda)] e^{-(t/\lambda)^k} - \right. \end{aligned}$$

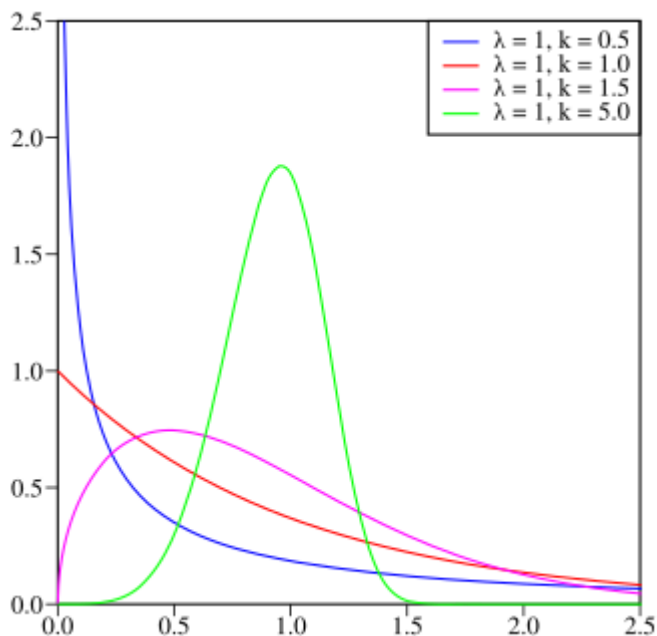


Рис. 1. Плотность вероятностей распределения Вейбулла при различных значениях параметра формы (степени k)

$$-k(t/\lambda)^{(k-1)}(t/\lambda)^{(k-1)}e^{-(t/\lambda)^k}(1/\lambda)\}. \quad (5)$$

Для отыскания максимума приравниваем нулю производную. В результате приходим к уравнению

$$(k-1) - k(t/\lambda)^k = 0, \quad (6)$$

которое имеет решение

$$t^* = \lambda \left(\frac{k-1}{k} \right)^{\frac{1}{k}}, k > 1. \quad (7)$$

Подставив (7) в (3), найдем максимальное значение функции Вейбулла

$$\begin{aligned} g(t^*) &= (k/\lambda)(t^*/\lambda)^{(k-1)}e^{-(t^*/\lambda)^k} = (k/\lambda) \left(\frac{k-1}{k} \right)^{\frac{1}{k}(k-1)} e^{-\frac{k-1}{k}} = \\ &= \frac{k-1}{e\lambda} \left(\frac{ek}{k-1} \right)^{\frac{1}{k}}. \end{aligned} \quad (8)$$

Отметим, что в точке $k = 1$ меняется вид функции, рис. 1. В самом деле при $k > 1$ функция имеет максимум на отрезке $0 < t < \infty$ в точке (7), величина которого равна (8). При $k = 1$ функция (3) превращается в экспоненту $g(t; \lambda, 1) = (1/\lambda)e^{-k/\lambda}$ и максимума не имеет. При $0 < k < 1$ аргумент t перед экспонентой оказывается в знаменателе. Функция при $t \rightarrow 0$ стремится к ∞ , максимумом и шириной не обладает.

Ширина плотности вероятностей Вейбулла на полувысоте

Определим ширину функции плотности вероятностей (3) из уравнения

$$g(t) = \frac{1}{2} g(t^*). \quad (9)$$

Подставив t^* в (9), получаем уравнение

$$(t/\lambda)^{(k-1)} e^{-(t/\lambda)^k} = \frac{1}{2} \left(\frac{ek}{k-1} \right)^{\frac{1}{k}-1}. \quad (10)$$

Рассмотрим переменную

$$z = t / \lambda.$$

Уравнение для определения z имеет вид

$$z^{(k-1)} e^{-z^k} = \frac{1}{2} \left(\frac{ek}{k-1} \right)^{\frac{1}{k}-1}. \quad (11)$$

и зависит от одного параметра k .

В области $k > 1$ уравнение имеет два корня. В области $k \leq 1$ уравнение имеет комплексные решения. Будем интересоваться областью $k > 1$.

В области значений параметра $k > 1$, в которой уравнение имеет два решения, найдём зависимость

$$\Delta z(k) = z_1(k) - z_2(k), \quad z_1 > z_2.$$

Тогда ширина распределения Вейбулла будет равна

$$\Delta t(k) = \lambda \Delta z(k). \quad (12)$$

Нелинейное уравнение (11) решалось методом дихотомии. Результаты решения сгруппированы в табл. 1 (столбцы 2–4).

Моменты плотности вероятностей Вейбулла

Вычислим среднее значение случайной величины t , используя плотность вероятностей Вейбулла. Для этого умножим величину t на функцию Вейбулла (3) и вычислим интеграл от 0 до ∞

Ширина $\Delta z(k)$, корни уравнения (11) $z_1(k)$ и $z_2(k)$, коэффициенты асимметрии $As(k)$ и эксцесса $Es(k)$ функции плотности вероятностей Вейбулла в зависимости от параметра формы k при $\lambda = 1$

| k | $\Delta z(k)$ | $z_1(k)$ | $z_2(k)$ | $As(k)$ | $Es(k)$ |
|-----|---------------|----------|----------|---------|---------|
| 1,5 | 1,2674 | 1,3311 | 0,0637 | 1,072 | 1,390 |
| 2 | 1,1332 | 1,3588 | 0,2256 | 0,631 | 0,245 |
| 3 | 0,8224 | 1,2879 | 0,4655 | 0,128 | -0,271 |
| 4 | 0,6274 | 1,2282 | 0,6008 | -0,087 | -0,252 |
| 5 | 0,5037 | 1,1871 | 0,6834 | -0,254 | -0,120 |
| 6 | 0,4197 | 1,1581 | 0,7384 | -0,373 | 0,035 |
| 7 | 0,3592 | 1,1366 | 0,7774 | -0,463 | 0,187 |
| 8 | 0,3138 | 1,1202 | 0,8064 | -0,534 | 0,328 |
| 9 | 0,2785 | 1,1073 | 0,8288 | -0,591 | 0,455 |
| 10 | 0,2502 | 1,0968 | 0,8466 | -0,638 | 0,570 |
| 11 | 0,2272 | 1,0882 | 0,8611 | -0,677 | 0,674 |
| 12 | 0,2080 | 1,0810 | 0,8730 | -0,711 | 0,767 |
| 13 | 0,1917 | 1,0749 | 0,8831 | -0,740 | 0,851 |
| 14 | 0,1779 | 1,0696 | 0,8917 | -0,765 | 0,928 |
| 15 | 0,1658 | 1,0650 | 0,8992 | -0,787 | 0,997 |
| 16 | 0,1553 | 1,0610 | 0,9057 | -0,807 | 1,061 |
| 17 | 0,1461 | 1,0575 | 0,9114 | -0,825 | 1,119 |
| 18 | 0,1379 | 1,0543 | 0,9164 | -0,841 | 1,172 |
| 19 | 0,1305 | 1,0515 | 0,9209 | -0,855 | 1,222 |
| 20 | 0,1239 | 1,0489 | 0,9250 | -0,868 | 1,267 |

$$\bar{t} = \int_0^{\infty} g(t; \lambda, k) t dt = \int_0^{\infty} (k/\lambda) (t/\lambda)^{(k-1)} e^{-(t/\lambda)^k} t dt. \quad (13)$$

Делаем замену переменных $t = \lambda z$

$$\bar{t} = k\lambda \int_0^{\infty} z^k e^{-z^k} dz. \quad (14)$$

Делаем еще одну замену переменных

$$z^k = y, dy = k z^{k-1} dz, dz = \frac{1}{k} y^{\frac{1}{k}-1} dy$$

$$\bar{t} = \lambda \int_0^{\infty} y^{\frac{1}{k}} e^{-y} dy. \quad (15)$$

Интеграл (15) встречается в теории Гамма-функций под названием интеграл Эйлера. Он равен [13]

$$\bar{t} = \lambda \Gamma\left(\frac{1}{k} + 1\right) = \frac{\lambda}{k} \Gamma\left(\frac{1}{k}\right). \quad (16)$$

Аналогично вычислим средний квадрат от функции Вейбулла

$$\begin{aligned}\bar{t}^2 &= \int_0^\infty g(t; \lambda, k) t^2 dt = k \lambda^2 \int_0^\infty z^{k+1} e^{-z^k} dz = \\ &= \lambda^2 \int_0^\infty y^{\frac{2}{k}} e^{-y} dy = \lambda^2 \Gamma\left(\frac{2}{k} + 1\right).\end{aligned}\quad (17)$$

Точно также можно вычислить любой момент распределения Вейбулла

$$\bar{t}^n = \int_0^\infty g(t; \lambda, k) t^n dt = \lambda^n \int_0^\infty y^{\frac{n}{k}} e^{-y} dy = \lambda^n \Gamma\left(\frac{n}{k} + 1\right).\quad (18)$$

Формулы (16)-(17) позволяют также вычислять дисперсию случайной величины

$$D(t) = \overline{(t - \bar{t})^2} = \bar{t}^2 - \bar{t}^2 = \lambda^2 \left[\Gamma\left(\frac{2}{k} + 1\right) - \Gamma^2\left(\frac{1}{k} + 1\right) \right].\quad (19)$$

И среднеквадратичное отклонение

$$\sigma = \sqrt{D(t)} = \lambda \sqrt{\left[\Gamma\left(\frac{2}{k} + 1\right) - \Gamma^2\left(\frac{1}{k} + 1\right) \right]}.\quad (19)$$

Сравнение с нормальным распределением

Нормальное распределение имеет вид

$$F(t - t') = \frac{1}{\sqrt{\pi} \cdot \Delta t} \cdot e^{-\left(\frac{t-t'}{\Delta t}\right)^2}.\quad (20)$$

Совместим максимум плотности вероятностей нормального распределения с точкой максимума плотности вероятностей распределения Вейбулла (7). Примем $\Delta t = 1$. На рис. 2а,б,в представлено изменение плотности вероятностей Вейбулла при изменении параметра формы k при неизменном значении параметра ширины $\lambda = 1$.

На рис. 3 представлено изменение плотности вероятностей Вейбулла от параметра ширины λ при неизменном значении параметра формы $k = 1.5$.

Коэффициенты асимметрии и эксцесса

Вычисление коэффициентов асимметрии и эксцесса сводится к расчёту центральных моментов третьего и четвертого порядков.

$$\mu_3 = \overline{(t - \bar{t})^3} = \bar{t}^3 - 3\bar{t}^2\bar{t} + 3\bar{t}\bar{t}^2 - \bar{t}^3 = \bar{t}^3 - 3\bar{t}^2\bar{t} + 2\bar{t}^3,\quad (21)$$

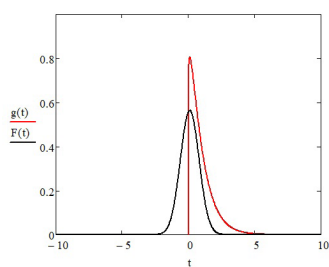
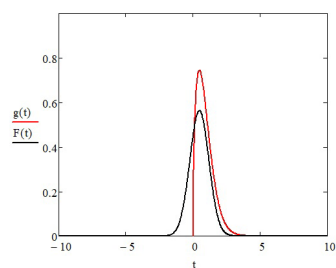
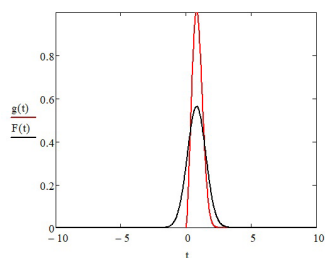
а) $k = 1.1, \lambda = 1$ б) $k = 1.5, \lambda = 1$ в) $k = 2.5, \lambda = 1$

Рис. 2а, б, в. Изменение плотности вероятностей Вейбулла при изменении k и неизменном значении $\lambda = 1$

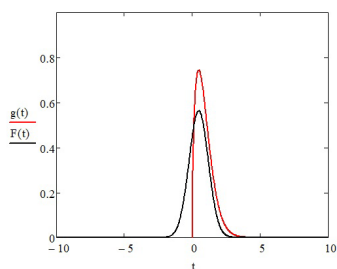
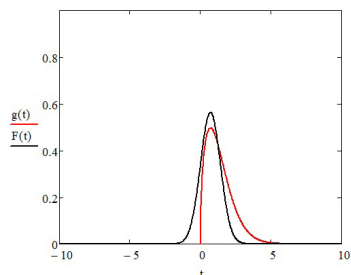
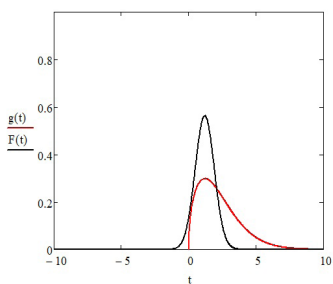
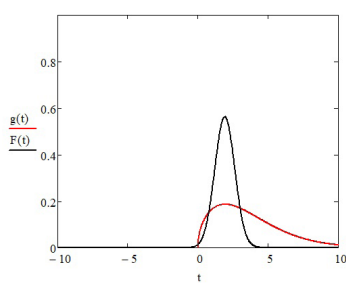
а) $k = 1.5, \lambda = 1$ б) $k = 1.5, \lambda = 1.5$ в) $k = 1.5, \lambda = 2.5$ г) $k = 1.5, \lambda = 4$

Рис. 3а, б, в, г. Изменение плотности вероятностей Вейбулла от λ при неизменном значении $k = 1.5$.

$$\begin{aligned}\mu_4 &= \overline{(t - \bar{t})^4} = \overline{(t^2 - 2t\bar{t} + \bar{t}^2)^2} = \overline{t^4 + 4t^2\bar{t}^2 +} \\ &= \overline{t^4 + 4t^2\bar{t}^2 + \bar{t}^4 - 4t^3\bar{t} + 2t^2\bar{t}^2 - 4t\bar{t}^3} = \\ &\quad \bar{t}^4 + 6\bar{t}^2\bar{t}^2 - 4\bar{t}^3\bar{t} - 3\bar{t}^4.\end{aligned}\quad (22)$$

Коэффициент асимметрии

$$A_s = \frac{\mu_3}{\sigma^3}, \quad (23)$$

характеризует отклонение графика функции плотности вероятностей от среднего значения в положительную, либо отрицательную сторону. Деление на σ^3 осуществляется, чтобы нормировать третий центральный момент на среднеквадратичное отклонение в кубе. При этом из рассмотрения выпадает параметр ширины распределения λ .

Эксцесс определяется формулой

$$E_s = \frac{\mu_4}{\sigma^4} - 3 \quad (24)$$

и отражает островершинность графика функции плотности вероятностей. Эксцесс для плотности вероятностей нормального распределения равен нулю. Поэтому, если $E_s > 0$, то график изучаемой функции имеет вершину выше, чем плотность вероятностей нормального распределения. А если $E_s < 0$, то ниже.

Для плотности вероятностей Вейбулла (3) при $k > 1$ коэффициент асимметрии сначала положителен, а затем меняет знак и становится отрицательным, см. табл. Это означает, что график плотности вероятностей Вейбулла для небольших значений k смещён в сторону нуля (влево), а при $k > 4$ — вправо.

Эксцесс для плотности вероятностей Вейбулла с ростом параметра формы сначала положителен, затем отрицателен, затем опять положителен, см. табл.

Использование плотности вероятностей Вейбулла для аппроксимации статистических данных.

На рис. 4 по оси абсцисс отложено время выздоровления заданной группы пациентов. По оси ординат число пациентов, выздоровевших за t суток. Группа пациентов насчитывала свыше $N \approx 100\,000$ чел., попавших на госпитализацию в городе Иркутске с диагнозом ковид-19 в 2020-21гг. [14].

В качестве характеристики оптимизации использовалась величина δ — параметр эффективности подгонки теоретической кривой под экспериментальные данные, равный отношению среднеквадратичного отклонения к максимальному значению экспериментальной статистики. Оптимизация осуществлялась методом

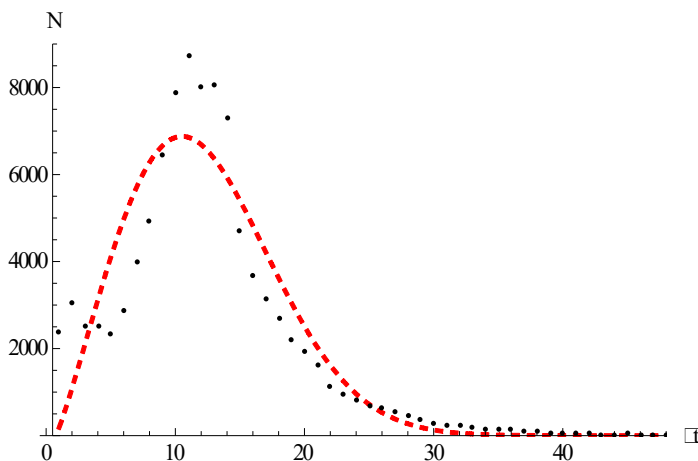


Рис. 4. Пример аппроксимации медицинской статистики выздоровлений от ковид-19 (точки) функцией Вейбулла (пунктир: $k=2.169$; $c=13.0341$; $\lambda=0.715311$; $\delta=0.164138$)

спуска по координатам [15], где за координаты принимались подгоночные параметры. На заключительном этапе оптимизации применялся метод спуска по градиенту [15].

Заключение

Плотность вероятностей Вейбулла достаточно широко используется в различных приложениях, в гидрологии, в климатологии, в электротехнике, в медицине и в других областях знаний. Вместе с тем, характеристики распределения Вейбулла такие как ширина плотности вероятностей, выражения для моментов, среднего значения, дисперсии, коэффициентов асимметрии и эксцесса отсутствуют в математических справочниках. В данной статье указанные характеристики рассчитаны и представлены в одном месте.

В статье приведены графики, демонстрирующие зависимость плотности вероятностей Вейбулла от изменения параметров формы и ширины. Получена формула для определения ширины плотности вероятностей Вейбулла на полувысоте. Выявлено, что ширина функции на полувысоте линейно зависит от параметра ширины λ и нелинейным образом зависит от параметра формы k . Рассчитаны значения ширины при разных значениях параметра формы k , табл.

Показано, что коэффициент асимметрии функции Вейбулла меняет знак. При небольших значениях параметра формы k он положительный, затем становится отрицательным и растёт по модулю, табл. Эксцесс меняет знак два раза. При небольших значениях параметра формы k эксцесс положительный, затем отрицательный, затем опять меняет знак на положительный, табл.

Представлено сравнение плотности вероятностей Вейбулла с плотностью вероятностей нормального распределения, рис. 2, 3, что представляет интерес для практических приложений, например, в электротехнике.

Также рассмотрен случай практического применения распределения Вейбулла в медицинской сфере, рис. 4. Данная статья восполняет существующий пробел в современных математических справочниках, позволяя исследователям и любым другим заинтересованным лицам более детально ознакомиться с характеристиками распределения Вейбулла вероятностными параметрами.

Список использованной литературы

1. Гродзенский С.Я. Распределение Вейбулла: история и современность / С.Я. Гродзенский. — DOI 10.18127/j20700970-202303-06. — EDN HNVDPQ // Нелинейный мир. — 2023. — Т. 21, № 3. — С. 54–65.
2. Проверка выполнения закона Вейбулла для различных направлений ветра, характерных для линейного города Волгограда / Ю. П. Иванова, Е. В. Соколова, А. А. Сахарова [и др.]. — EDN DNYMWH // Вестник Волгоградского государственного архитектурно-строительного университета. Серия: Строительство и архитектура. — 2020. — № 3 (80). — С. 134–141.
3. Статистический анализ прочности ультраориентированных пленочных нитей сверхвысокомолекулярного полиэтилена в рамках модели Вейбулла / Ю.М. Бойко, В.А. Марихин, Л.П. Мяникова [и др.]. — EDN XAXRXN // Физика твердого тела. — 2016. — Т. 58, № 10. — С. 2065–2068.
4. Прохоров С.А. Модель прогнозирования дефектных участков магистральных газопроводов с помощью заданного закона распределения Вейбулла / С.А. Прохоров, М.С. Даниленко. — EDN VWGTGZ // Естественные и технические науки. — 2016. — № 4 (94). — С. 220–224.
5. Гродзенская И.С. Исследование эффективности последовательных методов обнаружения сигналов на фоне помех, имеющих распределение Вейбулла / И.С. Гродзенская. — EDN MVQNHJ // Метрология. — 2006. — № 7. — С. 30–35.
6. Шнейдеров Е.Н. Использование распределения Вейбулла для группового прогнозирования параметрической надёжности изделий электронной техники / Е.Н. Шнейдеров. — EDN IIRDZQ // Современные средства связи : материалы XVII Междунар. науч.-техн. конф., Минск, 16–18 окт. 2012 г. — Минск, 2012. — С. 152–153.
7. Осовец С.В. Методы оценки неопределенности дозовых порогов для детерминированных эффектов / С.В. Осовец, Т.В. Азизова, С.Н. Гергенрейдер. — EDN TBDRYZ // Медицинская радиология и радиационная безопасность. — 2010. — Т. 55, № 3. — С. 11–16.
8. Применение лазеров на FA (II)-центрах окраски в кристаллах KCl : Li в методе внутривибрационной лазерной спектроскопии / В.М. Баев, В.П. Дубов, А.Н. Киреев [и др.]. — EDN XUPIGH // Квантовая электроника. — 1986. — Т. 13, № 8. — С. 1708–1710.
9. Усовершенствованная математическая модель эпидемической кинетики и заражение SARS-CoV-2 в поликлиниках / А.В. Боровский, А.Л. Галкин, Н.Н. Ильиных, С.С. Козлова. — DOI 10.17150/2500-2759.2022.32(1).161-169. — EDN WPUTNM // Известия Байкальского государственного университета. — 2022. — Т. 32, № 1. — С. 161–169.
10. Прудников А.П. Интегралы и ряды. Специальные функции / А.П. Прудников, Ю.А. Брычков, О.И. Маричев. — Москва : Наука, 1983. — 750 с.

11. Плескунов М.А. Теория вероятностей : справочник / М.А. Плескунов, Л.В. Корчёмкина. — Екатеринбург : Изд-во Урал. ун-та, 2017. — 136 с.
12. Трофимова Е.А. Теория вероятностей и математическая статистика : учеб. пособие / Е.А. Трофимова, Н.В. Кисляк, Д.В. Гилёв. — Екатеринбург : Изд-во Урал. ун-та, 2018. — 160 с.
13. Справочник по специальным функциям с формулами, графиками и математическими таблицами / под ред. М. Абрамовица, И. Стиган. — Москва : Наука, 1979. — 832 с.
14. Боровский А.В. Аппроксимация статистических данных заболеваемости коронавирусной инфекцией с учетом расслоения по сопутствующим диагнозам / А.В. Боровский, А.Л. Галкин, С.С. Козлова. — DOI 10.24143/2072-9502-2024-3-95-106. — EDN FPWATQ // Вестник Астраханского государственного технического университета. Серия: Управление, вычислительная техника и информатика. — 2024. — № 3. — С. 95–106.
15. Калиткин Н.Н. Численные методы / Н.Н. Калиткин. — Москва : Наука, 1978. — 512 с.

References

1. Grodzenskiy S.Ya. Weibull Disytibution: History and Modernity. *Nelineinyi mir = Nonlinear World*, 2023, vol. 21, no. 3, pp. 54–65. (In Russian). EDN: HNVP-DQ. DOI: 10.18127/j20700970-202303-06.
2. Ivanova Yu.P., Sokolova E.V., Sakharova A.A., Ivanova O.O., Azarov V.N. Checking Compliance with Weibull's Law for Various Wind Directions Typical of the Linear City of Volgograd. *Vestnik Volgogradskogo gosudarstvennogo arkhitekturno-stroitel'nogo universiteta. Seriya: Stroitel'stvo i arkhitektura = Bulletin of Volgograd State University of Architecture and Civil Engineering. Series: Construction and Architecture*, 2020, no. 3, pp. 134–141. (In Russian). EDN: DNYMWH.
3. Boiko Y.M., Marikhin V.A., Myasnikova L.P., Radovanova E.I., Moskalyuk O.A. Statistical Analysis of the Strength of Ultra-Oriented Ultra-High-Molecular-Weight Polyethylene Film Filaments in the Framework of the Weibull Model. *Fizika tverdogo tela = Physics of the Solid State*, 2016, vol. 58, no. 10, pp. 2065–2068. (In Russian). EDN: XAXRXN.
4. Prokhorov S.A., Danilenko M.S. A Model for Predicting Defective Sections of Main Gas Pipelines Using a Given Weibull Distribution Law. *Estestvennye i tekhnicheskie nauki = Natural and Technical Sciences*, 2016, no. 4, pp. 220–224. (In Russian). EDN: VWGTGZ.
5. Grodzenskaya I.S. Investigation of the Effectiveness of Sequential Signal Detection Methods Against the Background of Interference Having a Weibull Distribution. *Metrologiya = Measurement Techniques*, 2006, no. 7, pp. 30–35. (In Russian). EDN: MVQHJT.
6. Shneiderov E.N. Using the Weibull Distribution for Group Prediction of Parametric Reliability of Electronic Products. In the collection. In *Modern means of communication*. The Material of the XVII International Scientific-technical. Conference, Minsk, October 16-18, 2012. Minsk, 2012, pp. 152–153. (In Russian). EDN: IIRDZQ.
7. Osovets S.V., Azizova T.V., Gergenreider S.N. Methods of Uncertainty Assessment for Deterministic Effects Dose Thresholds. *Meditinskaya radiologiya i radiatsionnaya bezopasnost' = Medical Radiology and Radiation Safety*, 2010, vol. 55, no. 3, pp. 11–16. (In Russian). EDN: TBDRYZ.
8. Baev V.M., Dubov V.P., Kireev A.N., Sviridenkov E.A., Yushuk O.I., Toptygin D.D. Application of Lasers with FA (Ii) Color Centers in KCL:Li Crystals in Intracavity Laser Spectroscopy. *Kvantovaya elektronika = Quantum Electronics*, 1986, vol. 13, no. 8, pp. 1708–1710. (In Russian). EDN: XUPIGH.

9. Borovsky A.V., Galkin A.L., Ilinykh N.N., Kozlova S.S. Improved Mathematical Model of Epidemic Kinetics and Sars-Cov-2 Infection in Outpatient Clinics. *Izvestiya Baikal'skogo gosudarstvennogo universiteta = Bulletin of Baikal State University*, 2022, vol. 32, no. 1, pp. 161–169. (In Russian). EDN: WPUTNM. DOI: 10.17150/2500-2759.2022.32(1).161-169.
10. Prudnikov A.P., Brychkov Yu.A., Marichev O.I. *Integrals and Series. Special Functions*. Moscow, Nauka Publ., 1983. 750 p.
11. Pleskunov M.A., Korchemkina L.V. *Probability Theory*. Ekaterinburg, Ural University Publ., 2017. 136 p.
12. Trofimova E.A., Kislyak N.V., Gilev D.V. *Probability Theory and Mathematical Statistics*. Ekaterinburg, Ural University Publ., 2018. 160 p.
13. Abramowitz M., Stegun I. (eds). *Handbook of Mathematical Functions with Formulas, Graphs and Mathematical Tables*. U.S. Department of Commerce, National Bureau of Standards, 1964. 1082 p. (Russ. ed.: Abramowitz M., Stegun I. (eds). *Handbook of Mathematical Functions with Formulas, Graphs and Mathematical Tables*. Moscow, Nauka Publ., 1979. 832 p.).
14. Borovsky A.V., Galkin A.L., Kozlova S.S. Mathematical Modeling of Statistical Data on the Incidence of New Coronavirus Infection, Taking into Account the Stratification by Concomitant Diagnoses. *Vestnik Astrakhanskogo gosudarstvennogo tekhnicheskogo universiteta. Seriya: Upravlenie, vychislitel'naya tekhnika i informatika = Vestnik of Astrakhan State Technical University. Series: Management, Computer Science and Informatics*, 2024, no. 3, pp. 95–106. (In Russian). EDN: FP-WATQ. DOI: 10.24143/2072-9502-2024-3-95-106.
15. Kalitkin N.N. *Numerical Methods*. Moscow, Nauka Publ., 1978. 512 p.

Информация об авторах

Боровский Андрей Викторович — доктор физико-математических наук, профессор, кафедра математических методов и цифровых технологий, Байкальский государственный университет, г. Иркутск, Российская Федерация, e-mail: andrei-borovskii@mail.ru.

Воронов Александр Владимирович — студент, кафедра математических методов и цифровых технологий, Байкальский государственный университет, г. Иркутск, Российская Федерация, e-mail: vensar.alexander@mail.ru.

Юменчук Андрей Анатольевич — аспирант, кафедра математических методов и цифровых технологий, Байкальский государственный университет, г. Иркутск, Российская Федерация, e-mail: andrey.yumenchuk@mail.ru.

Галкин Андрей Леонидович — доктор физико-математических наук, старший научный сотрудник, Институт общей физики им. А.М. Прохорова Российской академии наук, г. Москва, Российская Федерация, e-mail: galkin@kapella.gpi.ru.

Information about the Authors

Andrey V. Borovsky — D.Sc. in Physics and Mathematics, Professor, Department of Mathematical Methods and Digital Technologies, Baikal State University, Irkutsk, Russian Federation, e-mail: andrei-borovskii@mail.ru

Alexander V. Voronov — Student, Department of Mathematical Methods and Digital Technologies, Baikal State University, Irkutsk, Russian Federation, e-mail: vensar.alexander@mail.ru.

Andrey A. Yumenchuk — PhD Student, Department of Mathematical Methods and Digital Technologies, Baikal State University, Irkutsk, Russian Federation, e-mail: andrey.yumenchuk@mail.ru.

Andrey L. Galkin — D.Sc. in Physics and Mathematics, Senior Researcher, Prokhorov General Physics Institute of the Russian Academy of Sciences, Moscow, the Russian Federation, e-mail: galkin@kapella.gpi.ru.

Вклад авторов

Все авторы сделали эквивалентный вклад в подготовку публикации. Авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.

Contribution of the Authors

The authors contributed equally to this article. The authors declare no conflicts of interests.

Для цитирования

Боровский А.В. Коэффициенты асимметрии и эксцесса для плотности вероятностей Вейбулла / А.В. Боровский, А.В. Воронов, А.А. Юменчук, А.Л. Галкин. — DOI 10.17150/2713-1734.2025.7(1).97-110. — EDN GWUEQX // *System Analysis & Mathematical Modeling*. — 2025. — Т. 7, № 1. — С. 97–110.

For Citation

Borovsky A.V., Voronov A.V., Yumenchuk A.A., Galkin L.G. The Coefficient of Asymmetry and the Access for the Weibull Probability Density. *System Analysis & Mathematical Modeling*, 2025, vol. 7, no. 1, pp. 97–110. (In Russian). EDN: GWUEQX. DOI: 10.17150/2713-1734.2025.7(1).97-110.