

Научная статья

УДК 378

EDN ZRAIYP

DOI 10.17150/2713-1734.2025.7(1).17-28



**В.В. Братищенко**

*Байкальский государственный университет,  
г. Иркутск, Российская Федерация*

## **Индикаторная модель экзаменационных оценок с латентными параметрами**

**Аннотация.** В статье предлагается для описания вероятностей экзаменационной оценки использовать индикаторы оценок 5, 4, 3. Предполагается, что вероятность единичного значения каждого индикатора зависит от латентных параметров: подготовленности обучающегося к получению оценки, соответствующей индикатору, и трудности получения соответствующей оценки на экзамене. Определены вероятности оценок в зависимости от вероятностей индикаторов. Определены вероятности индикатора в зависимости от значений латентных параметров обучающегося и экзамена. Методом максимального правдоподобия получены уравнения, связывающие латентные параметры и наблюдения индикаторов. Описан алгоритм численного решения уравнений для поиска оценок латентных параметров по массиву оценок. Адекватность модели проверена методами дисперсионного анализа. Описаны варианты применения модели экзаменационных оценок для повышения качества обучения.

**Ключевые слова.** Модель экзаменационных оценок, латентные параметры, статистическая обработка экзаменационных оценок, метод максимального правдоподобия, дисперсионный анализ, коэффициент детерминации.

**Информация о статье.** Дата поступления: 14 декабря 2024 г.; дата принятия к публикации: 11 марта 2025 г.; дата онлайн-размещения: 15 апреля 2025 г.

Original article

**V.V. Bratishchenko**

*Baikal state University,  
Irkutsk, Russian Federation*

## **Indicator Model of Examination Grades with Latent Parameters**

**Abstract.** The article proposes to use the indicators of grades 5, 4, 3 to describe the probabilities of an examination grade. It is assumed that the probability of a value of each indicator depends on the latent parameters: the student's readiness to receive a grade corresponding to the indicator and the difficulty of receiving the corresponding grade on the exam. The probabilities of grades are determined depending on the probabilities of indicators. The probabilities of the indicator are determined depending on the values of the student and exam latent parameters. The maximum likelihood method is used to obtain equations linking the latent parameters and observation of indicators. An algorithm for numerically solving equations for finding estimates of latent parameters from an array of grades is described. The adequacy of the model is verified using variance analysis methods. Options for applying the examination grade model to improve the quality of education are described.

**Keywords.** Model of examination grades, latent parameters, statistical processing of examination grades, maximum likelihood method, analysis of variance, determination coefficient.

**Article info.** Received 14 December, 2024; Accepted 11 March, 2025; Available online 15 April, 2025.

Исследование данных учебного процесса актуально для выявления факторов, влияющих на результаты академической успеваемости обучающихся и повышение качества учебного процесса. Традиционные статистические методы [1; 2] позволяют выявить зависимость рядов оценок, с одной стороны, от обучающихся, с другой стороны от дисциплин и преподавателей. Более детальное исследование такого рода зависимостей требует построения специализированных моделей. В работе предлагается такая модель, использующая латентные параметры подготовленности обучающихся и трудности экзаменов.

Изучение оценок выполняется в нескольких направлениях. Педагогическая наука [3; 4] рассматривает оценку как сложное явление, выполняющее множество педагогических функций. В работе [5] анализируются психологические факторы успешности обучения студентов, оцениваемые с помощью психометрических методов. Такого рода исследования, кроме рядов оценок, требуют трудоемкого сбора информации о психологических и социальных характеристиках обучающихся.

Объективность педагогических измерений связывают с применением тестирования [6]. Следует отметить, что тестирование, несмотря на множество положительных характеристик, не может полностью заменить оценки преподавателей. Тестирование позволяет оценить запоминание теоретических положений, умение решать стандартные задачи в рамках дисциплины, но не может измерить навыки практического применения знаний. Поэтому актуальной остается задача исследования экзаменационных оценок.

Вероятностные модели экзаменационных оценок, построенные по данным из общедоступных источников, несмотря на отсутствие многих характеристик, влияющих на успеваемость, позволяют строить обоснованные заключения о качестве учебного процесса.

В работах [7–2] изучается влияние на оценки разных факторов (результаты ЕГЭ, пол, источники финансирования обучения, проживание, ...), но при этом не учитывается зависимость оценок от характеристик обучающихся, дисциплин и преподавателей. Однако, такие зависимости несомненно есть [1; 13] и их изучение позволяет выявить дисциплины со значимыми отклонениями от некоторого «стандартного» распределения оценок. Конечно, такие отклонения могут быть вызваны объективными причинами, но чаще всего они связаны с недостатками в системе преподавания

и методике оценивания. Особенностью статистических моделей является то, что неоднородное множество студентов и экзаменов заменяется выборкой из некоторой генеральной совокупности. Очевидно, что объективно существуют такие понятия как «сильный» и «слабый» студент, «сложный» и «легкий» экзамен. Систематический учет этих факторов позволит сделать моделирование экзамена более точным.

В России применяется четырехбалльная шкала: «неудовлетворительно», «удовлетворительно», «хорошо», «отлично». В разных странах применяются разные шкалы [14]. Все шкалы оценивания достижений обучающихся являются порядковыми, т.е. позволяют ранжировать знания обучающихся, но не являются метрическими, т.е. не измеряют знания количественной мерой. Для таких шкал некорректно использовать усреднение. Для них применяют частотные характеристики градаций. В табл. 1 приведены частоты положительных оценок студентов БГУ одного направления обучения. Традиционно в сравнении шкал оценок обучающихся используют частоты только положительных оценок.

Таблица 1

**Частоты положительных оценок студентов одного направления обучения**

Оценка	Частота
Удовлетворительно	0,2620
Хорошо	0,4115
Отлично	0,3264

Статистические методы обработки оценок студентов основаны на модели генеральной совокупности. Применение таких методов продемонстрировало статистически значимую разницу в характеристиках множеств оценок, выставленных разными преподавателями, также как в характеристиках множеств оценок, полученных разными студентами. Это вынуждает искать другие модели для учета влияния особенностей обучающихся и экзаменов на оценки. Для таких моделей предлагается использовать подход теории тестирования – Item Response Theory (IRT), в которой особенности студентов и тестов описываются латентными (не наблюдаемыми) параметрами.

Согласно IRT [15] вероятность

$$P(\theta, \delta) = \frac{\exp(\theta)}{\exp(\theta) + \exp(\delta)}$$

правильного ответа на тестовое задание зависит от «трудности» задания, характеризуемого параметром  $\delta$ , и уровня «подготовленно-

сти» тестируемого, задаваемого параметром  $\theta$ . По оценкам тестирования указанные параметры определяются численными методами.

Первоначально IRT применялась для бинарных оценок. Впоследствии этот подход был распространен [16; 17] на политомические задания с несколькими вариантами ответа различной степени правильности (точности). При этом параметр трудности задания дополняется параметрами вариантов ответа. Такая универсальная модель позволяет разделить варианты ответа по трудности.

Исследование моделей с латентными параметрами [18; 19] продемонстрировало возможность применения такого подхода к описанию процесса экзаменационного оценивания. По итогам обработки массива оценок модели прошли проверку по критериям Фишера и хи-квадрат. В практике применения IRT было выявлено незначительное количество обучающихся с нестандартными реакциями на тестовые задания. Это оказалось справедливым и для применения моделей с латентными параметрами для экзаменов. Возможно это связано с тем, что некоторые обучающиеся никогда не получают оценку «неудовлетворительно» или «отлично», хотя модель с латентными параметрами определяет ненулевую вероятность таких событий.

Для более точной настройки модели на спектр оценок обучающегося предлагается следующая модель. Пусть экзаменационная оценка определяется тремя индикаторами:

$A = 1$ , если получена оценка «отлично» и 0 в других случаях;

$B = 1$ , если получена оценка «хорошо» и 0 в других случаях;

$C = 1$ , если получена оценка «удовлетворительно» и 0 в других случаях.

Только один из индикаторов будет равен единице. Если все индикаторы равны нулю, то выставлена оценка «неудовлетворительно». Рассматривая индикаторы как независимые случайные величины, получаем следующее распределение вероятностей оценки  $X$ :

$$\begin{aligned} P\{X = 5\} &= P\{A = 1\}, \\ P\{X = 4\} &= P\{B = 1 \mid A = 0\}, \\ P\{X = 3\} &= P\{C = 1 \mid A = 0, B = 0\}, \\ P\{X = 2\} &= P\{C = 0 \mid A = 0, B = 0\}, \end{aligned}$$

Таким образом, экзамен рассматривается как попытка обучающегося получить оценку 5 – «отлично». В случае неудачи выполняется попытка получить оценку 4 – «хорошо», а далее – «удовлетворительно». Возможно, эта схема не вполне соответствует процедуре экзамена, но в данном случае она позволяет описать процесс оценивания тремя индикаторами и соответствующими вероятностями. Адекватность модели проверяется традиционными статистическими методами.

Вероятности индикаторов будут определяться латентными параметрами

$$P(I_{ij} = 1) = \frac{\exp(\theta_{li})}{\exp(\theta_{li}) + \exp(\delta_{lj})}, \quad (1)$$

где  $I \in \{A, B, C\}$  – обозначение индикатора,

$i$  – номер обучающегося,

$j$  – номер экзамена,

$\theta_{ij}$  – подготовленность  $i$ -го обучающегося добиться оценки, соответствующей индикатору  $I$ ,

$\delta_{ij}$  – трудность добиться оценки, соответствующей индикатору  $I$ , на  $j$ -м экзамене.

Параметры индикатора  $A$  вычисляются по всем экзаменационным оценкам. Он принимает значение 1 для оценок «отлично» и 0 – в остальных случаях. Аналогично, параметры индикатора  $B$  определяются по всем оценкам кроме «отлично», а параметры индикатора  $C$  определяются по всем оценкам кроме «отлично» и «хорошо». Поскольку определение параметров для каждого индикатора выполняется по одинаковым алгоритмам, то в формулах обозначение индикатора будет опускаться.

По наблюдениям  $x_{ij}$  индикатора можно определить функцию максимального правдоподобия

$$L = \prod_{i,j} \left( \frac{\exp(\theta_i)}{\exp(\theta_i) + \exp(\delta_j)} \right)^{x_{ij}} \left( \frac{\exp(\delta_j)}{\exp(\theta_i) + \exp(\delta_j)} \right)^{1-x_{ij}}$$

и ее логарифм

$$l = \sum_{i,j} x_{ij} \theta_i + (1 - x_{ij}) \delta_j - \ln(\exp(\theta_i) + \exp(\delta_j)).$$

Границы изменения индексов  $i, j$  не указываются, так как набор оценок для разных обучающихся и экзаменов может отличаться. Далее предполагается, что в сумме по  $i$  учитываются оценки  $i$ -го обучающегося, в сумме по  $j$  – оценки  $j$ -го экзамена, в сумме по  $i, j$  – все оценки.

Применение метода максимального правдоподобия приводит к следующим уравнениям

$$\frac{\partial l}{\partial \theta_i} = \sum_j x_{ij} - \frac{\exp(\theta_i)}{\exp(\theta_i) + \exp(\delta_j)} = 0, \quad (2)$$

$$\frac{\partial l}{\partial \delta_j} = \sum_i \frac{\exp(\delta_j)}{\exp(\theta_i) + \exp(\delta_j)} - x_{ij} = 0. \quad (3)$$

Для поиска решения таких уравнений в ИРТ используется метод касательных

$$x^{(l+1)} = x^{(l)} - \frac{f(x^{(l)})}{f'(x^{(l)})},$$

в котором сумма (2) или (3) используется в качестве целевой функции, а производная целевой функции будет производной второго порядка от логарифма функции правдоподобия

$$\frac{\partial^2 l}{\partial \theta_i^2} = - \sum_j \frac{\exp(\theta_i) \exp(\delta_j)}{(\exp(\theta_i) + \exp(\delta_j))^2},$$

$$\frac{\partial^2 l}{\partial \delta_j^2} = - \sum_i \frac{\exp(\theta_i) \exp(\delta_j)}{(\exp(\theta_i) + \exp(\delta_j))^2}.$$

В работе [18] показано, что итерационный поиск решения уравнений (2) и (3) сводится к поиску минимума выпуклой функции.

Поиск параметров имеет следующие особенности: если все значения индикатора некоторого обучаемого равны 1, то поиск приводит к возрастанию параметра к  $+\infty$ , если все значения 0, то параметр стремится к  $-\infty$ . Такие ситуации соответствуют единичной и нулевой вероятности значения. Зеркальная ситуация характерна для параметров экзаменов. Другой особенностью является то, что все параметры могут быть увеличены или уменьшены на одну и ту же величину. Это следует учитывать при реализации алгоритмов поиска. Для обеспечения сходимости значения параметров приходится ограничивать сверху и снизу.

Начальные значения поиска можно выбрать, принимая в (2) что все  $\delta_j = 0$ . В этом случае

$$\theta_i^{(0)} = \ln \left( \frac{m_i}{m_i - \sum_j x_{ij}} - 1 \right),$$

где  $m_i$  — количество оценок  $j$ -го обучающегося. При получении бесконечных значений величина параметра ограничивается верхней и нижней границами. Аналогично, принимая в (3), что все  $\theta_i = 0$ , получаем

$$\delta_j^{(0)} = \ln \left( \frac{n_j}{\sum_i x_{ij}} - 1 \right),$$

где  $n_j$  — количество оценок  $j$ -го экзамена и применяются ограничения бесконечных значений.

По предложенной схеме были обработаны 1909 оценок для 52 экзаменов 147 студентов одного направления обучения. Для проверки адекватности модели использовался дисперсионный анализ, который позволяет проверить принадлежность оценок обучающихся одной генеральной совокупности. Для этого сравниваются усредненные выборочные дисперсии по студентам

$$M_2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \frac{1}{m_i - 1} \sum_j (x_{ij} - \bar{x}_{i*})^2,$$

где  $n$  — количество студентов

$$\bar{x}_{i*} = \frac{1}{m_i} \sum_j x_{ij}$$

с межгрупповой дисперсией

$$M_1 = \frac{1}{N - 1} \sum_{i=1}^n m_i (x_{i*} - \bar{x}_{**})^2,$$

где  $N$  — общее количество оценок

$$\bar{x}_{**} = \frac{1}{N} \sum_{i,j} x_{ij}.$$

В случае отсутствия влияния обучающегося на оценку,  $M_1$  и  $M_2$  являются разными оценками дисперсии одной и той же случайной величины. Статистика  $F = M_1 / M_2$ , при условии одинакового нормального распределения и независимости вариаций среди оценок, будет иметь распределение Фишера со степенями свободы  $n - 1$  и  $N - n$ . В исследованиях по статистике отмечается, что дисперсионный анализ устойчив по отклонению от нормальности, однородности дисперсии, асимметрии распределения. Проверка подтвердила, что оценки разных студентов не принадлежат одной генеральной совокупности. Аналогично не была подтверждена гипотеза о принадлежности одной генеральной совокупности оценок разных экзаменов.

По такому же критерию были проверены гипотезы о независимости остатков  $x'_{ij} = x_{ij} - M[x_{ij}]$ . Математическое ожидание определялось по распределению вероятностей (1) трех индикаторов. Вероятности значений индикаторов вычислялись по оценкам латентных параметров. Гипотезы о принадлежности одной генеральной совокупности остатков оценок для студентов и для экзаменов подтвердились с вероятностью близкой к единице.

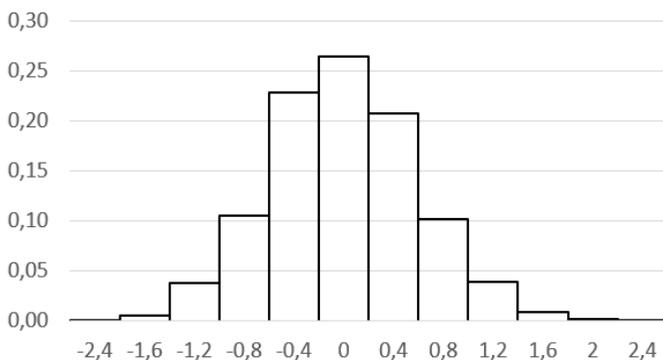
Для оценки полезности модели применяют коэффициент детерминации

$$R^2 = 1 - \frac{D[X \vee \theta, \delta]}{D[X]} = 1 - \frac{\sum (x_{ij} - M[X_{ij}])^2}{\sum (x_{ij} - \bar{x}_{**})^2},$$

который определяет «долю изменчивости», которую описывает модель. Таким образом, он показывает соотношение выявленной зависимости и «зашумленности» модели. Конечно, к «зашумленности» будут отнесены не только случайные факторы, но и зависимости, которые модель игнорирует.

Для анализируемого массива оценок коэффициент детерминации составил  $R^2 = 0,48$ . Если в качестве прогноза оценки брать среднее по оценкам студента, то  $R^2 = 0,32$ . Если в качестве прогноза оценки брать среднее по оценкам экзамена, то  $R^2 = 0,15$ .

На рисунке представлена гистограмма эмпирического распределения остатков. Соответствие эмпирического распределения нормальному по критерию хи-квадрат прошло проверку с уровнем значимости 0,04.



*Гистограмма остатков  $x_{ij} - M[x_{ij}]$*

По вероятностному распределению экзаменационной оценки можно вычислить дисперсию для каждого наблюдения оценки. Средняя дисперсия оценок характеризует случайность процесса оценивания. Средняя дисперсия оценок 0,362 оказалась сопоставимой с оценкой дисперсии всех остатков 0,358. Таким образом, модель выделяет закономерности определения оценок, несмотря на высокий уровень случайности в формировании экзаменационной оценки.

Модели экзаменационных оценок с латентными параметрами позволяют точнее представить процесс оценивания. На этой основе можно решать задачи сравнения оценок одного обучающегося, по-

лученные на разных экзаменах, для приведения шкалы оценивания к некоторому стандарту. Это позволит точнее ранжировать студентам по итогам обучения. Другое применение моделей заключается в сравнении латентных параметров разных экзаменов для выявления статистически значимых отклонений от средних значений. Такие отклонения могут свидетельствовать о недостатках в программе, организации обучения и методике оценивания.

### Список использованной литературы

1. Братищенко В.В. Статистический анализ экзаменационных оценок / В.В. Братищенко. — EDN NTYRIN // Известия Иркутской государственной экономической академии (Байкальский государственный университет экономики и права). — 2011. — № 3. — С. 31.
2. Бодряков В.Ю. Вероятностно-статистическая модель равно- и неравно- взвешенного подходов к количественному оцениванию знаний учащихся / В.Ю. Бодряков, К.Г. Фомина. — EDN JVPXHJ // Качество. Инновации. Образование. — 2008. — № 10. — С. 12–16.
3. Богоудинова Р.З. Основные подходы к оцениванию результатов образовательной деятельности / Р.З. Богоудинова. — EDN OKFERB // Вестник Казанского технологического университета. — 2011. — № 22. — С. 320–323.
4. Парфёнова А.В. Методические аспекты оценивания образовательных результатов по информатике на основе критериально-ориентированного подхода / А.В. Парфёнова. — EDN OXUGZB // Вестник РУДН. Серия: Информатизация образования. — 2012. — № 2. — С. 17–22.
5. Смирнов С.Д. Показатели интеллектуального потенциала студентов как предикторы успешности обучения в вузе / С.Д. Смирнов. — DOI 10.51314/2073-2635-2014-3-19-41. — EDN SNTMCZ // Вестник Московского университета. Серия 20. Педагогическое образование. — 2014. — № 3. — С. 19–41.
6. Звонников В.И. Современные средства оценивания результатов обучения / В.И. Звонников, М.Б. Чельшкова. — Москва : Академия, 2007. — 224 с.
7. Сосницкий В.Н. Вероятностный подход к анализу успеваемости студентов / В.Н. Сосницкий, Н.И. Потанин. — EDN SJMNAR // Фундаментальные исследования. — 2014. — № 8. — С. 734–738.
8. Лебедева Т.В. Статистический анализ факторов, влияющих на успеваемость студентов российских вузов / Т.В. Лебедева, А.П. Цыпин, В.С. Сидоренко. — EDN YHGLVP // Интеллект. Инновации. Инвестиции. — 2016. — № 9. — С. 55–58.
9. Галимова Н.С. Построение многофакторной модели успеваемости студента / Н.С. Галимова, Л.Р. Загитова. — DOI 10.23670/IRJ.2020.96.6.080. — EDN OPTLTI // Международный научно-исследовательский журнал. — 2020. — № 6-3 (96). — С. 31–36.
10. Русаков С.В. Нейросетевая модель прогнозирования группы риска по успеваемости студентов первого курса / С.В. Русаков, О.Л. Русакова, К.А. Посохина. — DOI 10.25559/SITITO.14.201804.815-822. — EDN JWGGFH // Современные информационные технологии и ИТ-образование. — 2018. — Т. 14. — № 4. — С. 815–822.
11. Канапухин П.А. Статистический анализ факторов академической успеваемости (на примере обучающихся экономического факультета ФГБОУ ВО «ВГУ») / П.А. Канапухин, В.В. Коротких, С.С. Щекунских. — DOI 10.17308/econ.2020.2/2899. — EDN SYWUAJ // Вестник Воронежского государственного университета. Серия: Экономика и управление. — 2020. — № 2. С. 27–44.

12. Гранков М.В. Анализ и кластеризация основных факторов, влияющих на успеваемость учебных групп вуза / М.В. Гранков, В.М. Аль-Габри, М.Ю. Горлова. — EDN VYBVEN // Инженерный вестник Дона. — 2016. — № 4 (43). — С. 57.
13. Шафоростова Е.Н. Проблемы внедрения информационной системы контроля качества обучения студентов / Е.Н. Шафоростова, Т.И. Лазарева. — EDN NCZSCJ // Вестник Белгородского государственного технологического университета им. В.Г. Шухова. — 2010. — № 3. — С. 173–176.
14. Рожков Н.Н. Система пересчета оценок успеваемости - инструмент поддержки академической мобильности / Н.Н. Рожков. — EDN KUWVJH // Университетское управление: практика и анализ. — 2006. — № 5. — С. 104–113.
15. Rasch G. Probabilistic Models for Some Intelligence and Attainment Tests / G. Rasch. — Chicago : The University of Chicago Press, 1980. — 228 p.
16. Masters G.N. A Rasch Model for Partial Credit Scoring / G.N. Masters // Psychometrika. — 1982. — Vol. 47. — P. 149–174.
17. Andrich D. A Rating Formulation for Ordered Response Categories / D. Andrich // Psychometrika. — 1978. — Vol. 43. — P. 561–573.
18. Братищенко В.В. Параметрическая модель экзаменационных оценок / В.В. Братищенко // Качество. Инновации. Образование. — 2012. — № 3. — С. 32–35.
19. Родионов А.В. Модификация рейтинговой параметрической модели оценки латентных факторов для измерения уровня сформированности компетенций / А.В. Родионов. — DOI 10.17150/1993-3541.2014.24(6).168-174. — EDN TEJYXZ // Известия Иркутской государственной экономической академии (Байкальский государственный университет экономики и права). — 2014. — № 6 (98). — С. 168–174.

## References

1. Bratishchenko V.V. Statistic Analysis of Examination Grades. *Izvestiya Irkutskoy gosudarstvennoy ekonomicheskoy akademii (Baykalskiy gosudarstvennyy universitet ekonomiki i prava) = Izvestiya of Irkutsk State Economics Academy (Bai-kal State University of Economics and Law)*, 2011, no. 3, pp. 31. (In Russian). EDN: NTYRIN.
2. Bodryakov V.Yu., Fomina K.G. Probabilistic-Statistical Model of Equi — and Nonequiwighted Approach to Quantitative Estimathion of Student's Knowledge's. *Kachestvo. Innovatsii. Obrazovanie = Quality. Innovation. Education*, 2008, no. 10, pp. 12–16. (In Russian). EDN: JVPXHJ.
3. Bogoudinova R.Z. Basic approaches to assessing the results of educational activities. *Vestnik Kazanskogo tekhnologicheskogo universiteta = Herald of Kazan Technological University*, 2011, no. 22, pp. 320–323. (In Russian). EDN: OKFEPB.
4. Parfenova A.V. Methodical Aspects of Estimation of Education Results on Computer Science on the basis of the Criteria *Oriented Approach*. *Vestnik RUDN. Seriya: Informatizatsiya obrazovaniya = Rudn Journal of Informatization in Education*, 2012, no. 2, pp. 17–22. (In Russian). EDN: OXUGZB.
5. Smirnov S.D. Measures of Students' Intellectual Potential as Predictors of Success in Hei Studies. *Vestnik Moskovskogo universiteta. Seriya 20: Pedagogicheskoe obrazovanie = Lomonosov Pedagogical Education Journal*, 2014, no. 3, pp. 19–41. (In Russian). EDN: SNTMCZ. DOI: 10.51314/2073-2635-2014-3-19-41.
6. Zvonnikov V.I., Chelyshkova M.B. Modern means of assessing learning outcomes. Moscow, Akademiya Publ., 2007. 224 p.
7. Sosnitskii V.N., Potanin N.I. A Probabilistic Approach to Analysis of the Student Performance. *Fundamental'nye issledovaniya = Fundamental research*, 2014, no. 8, pp. 734–738. (In Russian). EDN: SJMNAR.

8. Lebedeva T.V., Tsybin A.P., Sidorenko V.S. Statistical Analysis of Factors Influencing on Students Progress in Russian Universities. *Intellekt. Innovatsii. Investitsii = Intelligence. Innovations. Investments*, 2016, no. 9, pp. 55–58. (In Russian). EDN: YHGLVP.
9. Galimova N.S., Zagitova L.R. Construction of a Multi-Factor Model of the Students' Academic Performance. *Mezhdunarodnyi nauchno-issledovatel'skii zhurnal = International Research Journal*, 2020, no. 6-3, pp. 31–36. (In Russian). EDN: OPTLTI. DOI: 10.23670/IRJ.2020.96.6.080.
10. Rusakov S.V., Rusakova O.L., Posokhina K.A. Neural Network Model of Predicting the Risk Group for the Accession of Students of the First Course. *Sovremennye informatsionnye tekhnologii i IT-obrazovanie = Modern Information Technology and IT-education*, 2018, vol. 14, no. 4, pp. 815–822. (In Russian). EDN: JWGGFH. DOI: 10.25559/SITITO.14.201804.815-822.
11. Kanapukhin P.A., Korotkikh V.V., Shchekunskikh S.S. Statistical Analysis of Academic Performance (By an Example from the Faculty of Economics of Voronezh State University). *Vestnik Voronezhskogo gosudarstvennogo universiteta. Seriya: Ekonomika i upravlenie = Proceedings of Voronezh State University. Series: Economics and Management*, 2020, no. 2, pp. 27–44. (In Russian). EDN: SYWUAI. DOI: 10.17308/econ.2020.2/2899.
12. Grankov M.V., Al'-Gabri V.M., Gorlova M.Yu. Analysis and Clustering of Basic Factors Affect on Academic Performance of University Groups. *Inzhenernyy vestnik Dona = Engineering journal of Don*, 2016, no. 4, pp. 57. (In Russian). EDN: VYBVEH.
13. Shaforostova E.N., Lazareva T.I. Problems of implementation of information system for monitoring the quality of student education. *Vestnik Belgorodskogo gosudarstvennogo tekhnologicheskogo universiteta im. V. G. Shukhova = Bulletin of BSTU Named After V.G. Shukhov*, 2010, no. 3, pp. 173–176. (In Russian). EDN: NCZSCJ.
14. Rozhkov N.N. The System of Grades Conversion - A Tool to Support the Academic Mobility. *Universitetskoe upravlenie: praktika i analiz = Journal University Management: Practice and Analysis*, 2006, no. 5, pp. 104–113. (In Russian). EDN: KUWVJH.
15. Rasch G. *Probabilistic Models for Some Intelligence and Attainment Tests*. Chicago : The University of Chicago Press, 1980. 228 p.
16. Masters G.N. A Rasch Model for Partial Credit Scoring. *Psychometrika*, 1982, vol. 47, pp. 149–174.
17. Andrich D. A Rating Formulation for Ordered Response Categories. *Psychometrika*, 1978, Vol. 43, pp. 561–573.
18. Bratishchenko V.V. *Parametric model of examination grades. Quality. Innovation. Education = Quality. Innovation. Education*, 2012, no. 3, pp. 32–35. (In Russian).
19. Rodionov A.V. Modification of the Rating Parametric Model of Latent Factors Estimation for Assessing the Level of Competence Formation. *Izvestiya Irkutskoy gosudarstvennoy ekonomicheskoy akademii (Baykalskiy gosudarstvennyy universitet ekonomiki i prava) = Izvestiya of Irkutsk State Economics Academy (Bai-kal State University of Economics and Law)*, 2014, no. 6, pp. 168–174. (In Russian). EDN: TEJYX. DOI: 10.17150/1993-3541.2014.24(6).168-174.

### Информация об авторе

**Братищенко Владимир Владимирович** — кандидат физико-математических наук, доцент, кафедра математических методов и цифровых технологий, Байкальский государственный университет, г. Иркутск, Российская Федерация, e-mail: vvb@bgu.ru.

### Information about the Author

**Vladimir V. Bratschenko** — PhD in Physics and Mathematics, Associate Professor, Department of Mathematical Methods and Digital Technologies, Baikal State University, Irkutsk, Russian Federation, e-mail: [vvb@bgu.ru](mailto:vvb@bgu.ru).

### Для цитирования

Братищенко В.В. Индикаторная модель экзаменационных оценок с латентными параметрами / В.В. Братищенко. — DOI 10.17150/2713-1734.2025.7(1).17-28. — EDN ZRAIYP // *System Analysis & Mathematical Modeling*. — 2025. — Т. 7, № 1. — С. 17–28.

### For Citation

Bratschenko V.V. Indicator Model of Examination Grades with Latent Parameters. *System Analysis & Mathematical Modeling*, 2025, vol. 7, no. 1, pp. 17–28. (In Russian). EDN: ZRAIYP. DOI: 10.17150/2713-1734.2025.7(1).17-28.