Научная статья
УДК 519.24; 517
EDN IMTELI
DOI 10.17150/2713-1734.2024.6(1)5-16

А.В. Казазаева
Байкальский государственный университет,
г. Иркутск, Российская Федерация

Проблемы и методы оценки параметров математических моделей

Аннотация. Дается описание технологии поэтапного моделирования функционирования квазистационарных систем. Одной из методических проблем в реализации данной технологии является выбор способа оценки параметров модели на разных этапах ее формирования по располагаемым порой противоречивым, неточным, разновременным данным. Для оценки параметров зависимостей могут использоваться разные методы в том числе наименьших модулей, наименьших квадратов, минимизации максимального отклонения расхождений оценок параметров используемых в модели зависимостей и располагаемых исходных данных. Применительно к задаче оценки параметров линеаризованных зависимостей рассматриваются результаты сравнительного анализа указанных и других способов оценки параметров. Рассматривается пример оценки параметров смертности большой и малой голомянки на основе аппроксимации усеченным экспоненциальным законом распределения возраста рыб из уловов.

Ключевые слова. Поэтапное моделирование биологических, технических и экономических систем; методы оценки параметров, наименьшие модули, наименьшие квадраты, чебышевская аппроксимация, весовые коэффициенты, динамика смертности голомянки.

Информация о статье. Дата поступления: 9 ноября 2023 г.; дата принятия к публикации: 12 марта 2024 г.; дата онлайн-размещения: 30 марта 2024 г.

Original article

A.V. Kazazaeva
Baikal State University,
Irkutsk, Russian Federation

Algorithms and Software for Numerical Estimation of Posinomial Regression Models Using the Least Squares Method

Abstract. The technology of step-by-step modeling of the functioning of quasi-stationary systems is described. One of the methodological problems in the implementation of this technology is the choice of a method for estimating the parameters of the model at different stages of its formation based on the sometimes contradictory, inaccurate, multi-time data available. To estimate the parameters of dependencies, various methods can be used, including least modules, least squares, minimizing the maximum deviation of the discrepancies between the estimates of the parameters used in the dependency model and the available source data. In relation to the problem of estimating the parameters of linearized dependencies, the results of a comparative analysis of these and other methods of parameter estimation are considered. An example of estimating the mortality parameters of a large and small golomyanka is considered on the basis of approximation by a truncated exponential law of the distribution of the age of fish from catches.

Keywords. Step-by-step modeling of biological, technical and economic systems; methods of parameter estimation, the smallest modules, least squares, chebyshev approximation, weight coefficients, dynamics of mortality of golomyanka.

Article info. Received 9 November, 2023; Accepted 12 March, 2024; Available online 30 March, 2024.

В данной статье в рамках развиваемой технологии поэтапного математического моделирования [1–3] обсуждается проблема оценки параметров математических моделей поведения квазистационарных систем [4]. Особое внимание уделяется задаче выбора метода оценки параметров модели на основе располагаемых порой противоречивых, разновременных данных. Результаты этих исследований иллюстрируются на примере оценки параметров динамики смертности малой и большой голомянки, являющимися основными по биомассе рыбами озера Байкал.

Формирование модели в рамках рассматриваемой технологии включает следующие этапы.

1. Определение элементов системы, которые можно считать первичными относительно независимыми составляющими моделируемой системы. Предварительная оценка значений их параметров в стационарных состояниях, под которыми подразумевается стабильность (относительная неизменность) внешних условий и стабильность (устойчивость) функционирования рассматриваемого элемента системы.

2. Построение автономных динамических моделей функционирования элементов и первичных подсистем в условиях равновесия и стационарности внешней среды. Введение и оценка обратных связей в динамике функционирования элементов и подсистем.

3. Исследование поведения автономных моделей подсистем. Определение их стационарные состояния. Исследование их реакции на возмущающие воздействия и на возможные отклонения экзогенных параметров. На основе таких исследований, уточняются численные значения параметров модели, уточняются характеристики обратных связей в рамках исследуемой подсистемы, функциональные зависимости в описании динамики поведения подсистемы.

4. Последовательная сборка модели системы из моделей отдельных подсистем путем, прежде всего, введения динамических связей между отдельными подсистемами. Производится оценка параметров вводимых зависимостей между отдельными подсистемами и, с учетом этого, уточняются характеристики динамических связей внутри исходных подсистем. Производится анализ поведе-

ния поэтапно формируемой модели аналитическими и численными методами.

5. Итеративное расширение создаваемой модели путем включения в нее новых объектов и подсистем, начиная с этапов формирования новых, не включенных ранее элементов и первичных подсистем в стационарных условиях.

Обсуждаемая технология включает процедуры агрегирования отдельных объектов в подсистемы, методы согласования полученных параметров, алгоритмы проверки модели на адекватность. На всех этапах одна из необходимых и наиболее трудных решаемых задач — выбор параметров зависимостей, используемых в моделях. Для ее решения необходимо ответить на вопрос — чем соизмерять близость наблюдаемых и рассчитываемых в рамках модели показателей.

Для измерения точности аппроксимации могут использоваться различные нормы от векторов невязок аппроксимации. В том числе это могут быть октаэдральные, евклидовы, чебышевские или гельдеровские нормы. В рамках каждой их указанных норм возможны варианты, вызванные использованием различных положительных весовых коэффициентов при отдельных компонентах вектора навязок. Возможно использование в качестве минимизируемых штрафных функций и многих других видов функций от вектора невязок. Часто априори нельзя сказать какая из этих функций наиболее подходящая для рассматриваемой проблемы аппроксимации. Поэтому важно знать, как влияет выбор минимизируемой функции на получаемые решения, как соотносятся решения, получаемые при использовании разных штрафных функций.

Возможность использования аппроксимации методом наименьших квадратов вместо аппроксимации другими методами

Рассматриваем случай линейной аппроксимации. Модели с линейными зависимостями нередко используются. К линейным аппроксимациям можно приходить в результате линеаризаций или других преобразований задач аппроксимации нелинейными зависимостями. Пример использования логарифмических преобразований для перехода от исходных нелинейных к линейным зависимостям будет рассмотрен в конце данной статьи.

Обозначим λ вектор состоящий из набора искомых значений параметров линейной аппроксимации. В общем виде проблема поиска параметров линейной аппроксимации формулируется как задача минимизации некоторой штрафной функции f от вектора невязок аппроксимации. Оптимальное значение вектора невязок представим, как вектор-функцию от используемой штрафной функции:

$$\xi(f) = \arg\min_{\xi \in L} f(\xi), \tag{1}$$

$$L = \{\xi \in R^n : \xi_j = y_j - \sum_{i=1}^{m} x_j^i \lambda_i,\ j = \overline{1,\ n},\ \lambda \in R^m\}, \tag{2}$$

где $j = \overline{1,\ n}$ — номера наблюдений, $i = \overline{1,\ m}$ — номера факторов, x_j^i — значение *i*-го фактора в *j*-м наблюдении, y_j — значение результирующего показателя в *j*-м наблюдении. Искомыми в задаче (1), (2) являются векторы ξ, λ. Здесь ξ — вектор невязок линейной аппроксимации. Множество значений этого вектора составляют линейное многообразие L. Далее будут рассмотрены свойства множества векторов невязок, образуемое использованием различных штрафных функций. Свойства этого множества несложно транслировать в свойства множества оптимальных значений вектора параметров линейной аппроксимации λ.

Обозначим через F — множество дифференцируемых функций, каждая из которых, в результате возрастающего преобразования, может перейти в строго выпуклую дифференцируемую функцию, удовлетворяющую условию

$$sign \nabla_j f(\xi) = sign \xi_j,\ j = \overline{1,\ n}. \tag{3}$$

Согласно этому условию значение штрафной функции должны возрастать при уменьшении компоненты вектора невязок с отрицательным значением и при увеличении компоненты вектора невязок с положительными значениями.

При любой функции $f \in F$ решение задачи (1) существует и единственно [5]. Нельзя априори говорить о том какая из штрафных функций наиболее подходящая в конкретные задачи вида (1). Поэтому важно знать, какое влияние на получаемое решение может оказать выбор штрафной функции.

К классу функций F относятся гельдеровские нормы

$$\rho_h^p(\xi) = (\sum_{j=1}^{n} h_j \left|\xi_j\right|^p)^{1/p}, \tag{4}$$

где $p > 1$ — степенной коэффициент, $h_j > 0$, $j = \overline{1,\ n}$ — весовые коэффициенты. Весовые коэффициенты могут иметь разные причины их введения: разная точность наблюдений, разную важности, ценности или информативности данных.

Гельдеровские нормы со степенным коэффициентом $p = 2$ называются евклидовыми нормами. Использование в (1) евклидовой нормы означает, что задача решается методом наименьших квадратов. Введем обозначение для множества решений задачи (1) с такими штрафными функциями (множество евклидовых проекций начала координат на линейное многообразие)

$$P_2 = \{\xi(\rho_h^2) : h_j > 0,\ j = \overline{1,\ n}\}. \tag{5}$$

Множество решений задачи (1) с различными штрафными функциями из класса F обозначим

$$PF = \{\xi(f) : f \in F\}. \tag{6}$$

Так как евклидовы нормы являются штрафными функциями из множества F, то множество евклидовых проекций является подмножеством множества PF. Оказывается справедливо и обратное соотношение: множество PF находится в множестве P_2. Следовательно справедлив следующий факт: м*ножества* PF *и* P_2 *совпадают* [4; 5]. Метод наименьших квадратов, за счет выбора весовых коэффициентов, позволяет получать любые решения, которые дают штрафные функции из очень широкого класса F.

Чебышевская аппроксимация

При решении задач аппроксимации могут использоваться в качестве штрафных функций и не дифференцируемые нормы векторов невязок. Наиболее важными из них являются октаэдральные и чебышевские нормы. Их использование в задаче (1) означает, что аппроксимация производиться методом наименьших модулей и, во втором случае, что производится чебышевская аппроксимация.

Чебышевская норма

$$\rho_h^\infty(\xi) = \max h_j \left|\xi_j\right|, \tag{7}$$

является придельный случаем гельдеровских норм при возрастании степенного коэффициента p к бесконечности: для заданного вектора положительных весовых коэффициентов h при любом $\xi \in R^n$

$$\rho_h^p(\xi) \to \rho_h^\infty(\xi) \text{ при } p \to \infty. \tag{8}$$

Использование чебышевских норм в задаче (1) может приводить к неоднозначности оптимальных решений. Вместе с тем гельдеровские проекции начала координат на линейное многообразие при возрастании степенного коэффициента к бесконечности сходятся к единственной чебышевской проекции начала координат на это же линейное многоообразие [6], которую есть основания считать «истинной» чебышевской проекцией. Весовые коэффициенты в гельдеровских и чебышевской проекции при этом одни и те же.

Обозначим P_∞ множество определяемых таким образом чебышевских проекций начала координат на линейное многообразие L при варьировании положительных весовых коэффициентов. Доказано [6], что множества P_2 и P_∞ совпадают. То есть любую чебышевскую аппроксимацию можно получить как аппроксимацию методом наименьших квадратов за счет выбора весовых коэффициентов в методе наименьших квадратов.

Аппроксимация методом наименьших модулей

В некоторых работах [7; 8] для целей аппроксимации рассматривается в качестве штрафной функции октаэдральная норма

$$\rho_h^1(\xi) = \sum_1^n h_j \, |x_j|, \tag{9}$$

Ее использование приводит к неоднозначному решению задачи (1). Причем нет оснований выделять какое-то одно из возможных решений. Обозначим P_1 объединение множеств решений задачи (1) при различных положительных весовых коэффициентах. Доказано [9], что множество P_1 является замкнутым, содержащим множество P_2. При этом замыкание множества P_2 совпадает с множеством P_1,

$$clP_2 = P_1. \tag{10}$$

Это означает, что за счет выбора весовых коэффициентов в методе наименьших квадратов можно получать с любой требуемой точностью любую октаэдральную аппроксимацию, т.е. аппроксимацию, получаемую методом наименьших модулей с любыми заданными весовыми коэффициентами в октаэдральной норме.

Из представленного обзора имеющихся теоретических результатов следует, что аппроксимация методом наименьших квадратов является достаточно универсальным средством. За счет выбора весовых коэффициентов в методе наименьших квадратов можно получать результаты, достигаемые многими другими методами. При этом метод наименьших квадратов обладает вычислительными преимуществами. Его использование приводит к необходимости решения системы линейных уравнений с симметричной неотрицательно определенной матрицей. Причем получаемые решения являются непрерывными вектор-функциями от вектора весовых коэффициентов в отличии, например, от метода наименьших модулей.

Диапазоны изменений решений при варьировании весовых коэффициентов

Приведенные выше факты позволяют проблему выбора метода аппроксимации свести к проблеме выбора весов в методе наименьших квадратов.

Введем множество векторов линейного многообразия L с нерасширяемыми наборами нулевых компонент:

$$B = \left\{ \xi \in L : \neg \exists \xi \in L \; J_0(\xi) \subset J_0(\tilde{\xi}) \right\}, \tag{11}$$

где

$$J_0(\xi) = \{ j : \xi_j = 0 \} \tag{12}$$

множество номеров вектора с нулевыми значениями. Символ $\subset$ обозначает строгое включение. Векторы из B можно также называть векторами линейного многообразия с минимальным носителем (носитель вектора — множество номеров его ненулевых компонент). У любых двух векторов из B носители различаются и содержат не более чем m компонент. Поэтому число векторов в B конечно.

Обозначим coB, P_1 выпуклые оболочки векторов из B и из P_1. Как доказано в [9] эти множества совпадают,

$$coB = coP_1. \tag{13}$$

Отметим, что множества P_1 и P_2 могут быть не выпуклыми, но обязательно связные.

Отсюда в частности следует, что диапазоны возможных изменений отдельных компонент вектора евклидовых проекций начала координат на линейное многообразие при варьировании весовых коэффициентов в евклидовой норме могут быть определены как диапазоны возможных вариаций соответствующих компонент векторов из конечного множества B.

Это позволяет оценивать и диапазоны возможных значений коэффициентов линейной аппроксимации, составляющих вектор λ. Если у матрицы значений факторов в отдельных наблюдениях, т.е. составленной из коэффициентов x_j^i, столбцы линейно независимы, то каждому значению вектора невязок ξ из линейного многообразия L соответствует единственный вектор λ, удовлетворяющий с данным ξ системе линейных ограничений в определении (2) линейного многообразия L. Каждому вектору невязок из B будет соответствовать единственный вектор λ. Выпуклая оболочка конечного числа таких векторов будет содержать вектор коэффициентов линейной аппроксимации, получаемый любым из рассмотренных выше способов.

Коэффициенты смертности большой и малой голомянки

Голомянка является основной по биомассе рыбой озера Байкал. Известны ее два вида — большая голомянка и малая голомянка. Оба вида имеют существенную роль в экосистеме Байкала, в том числе в трофических отношениях организмов озера. Правильное представление динамики функционирования этих двух видов рыб важно для выработки правильной картины устройства экосистемы озера Байкал в целом**.** Одной из задач в описании динамики является описание процесса смертности рыб с увеличением ее возраста. Поскольку оба вида голомянки являются не промысловыми рыбами, то в данном случае речь идет только об естественной смертности.

Одним из способов получения информации о динамики смертности рыб в разных возрастах является анализ соотношений возрастов рыб в уловах. На рис. 1 представлены процентные распределения по возрастам большой и малой голомянки за пять лет отловов — с 1969 по 1975 гг. Эти данные приведены в книге Г. В. Старикова [9]. Из этих графиков видно, что распределение по возрастам можно в первом приближении выражать экспоненциальной зависимостью:

$$N(x) = Ce^{-\lambda x}, \tag{14}$$

где $N(x)$ — численность особей данного возраста, l — коэффициент смертности, x — возраст, C — некоторая константа. Согласно представленным данным считается, что у обоих видов голомянки придельный возраст, начиная с сеголеток составляет 6 лет. Зависимость (14) можно рассматривать как значения вероятности отдельного случайно пойманного экземпляра рыбы иметь возраст x. Зависимость (14) для случая конечного числа значений $x = 1, ..., T$, будет представлять усеченный экспоненциальный закон распределения случайной величины, если коэффициент C задан таким, чтобы сумма величин $N(x)$ по $x = 1, ..., T$ была равна единице.

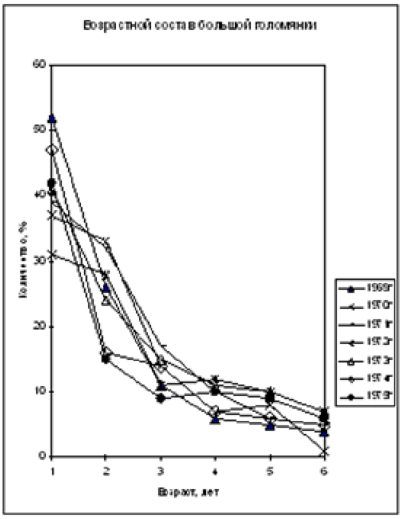
Можно отметить, что еще создатель теории динамики рыб Ф.И. Баранов [10] писал о целесообразности использования именно экспоненциальной зависимости при характеристике изменений численности рыб с увеличением возраста. Этой точки зрения придерживались и многие ученые, занимавшиеся созданием, реализацией и использованием моделей динамики рыб в водоемах. Например, С.А. Северцев [11].

Путем логарифмирования экспоненциальную зависимость (14) можно свести к линейной. Обозначим $y = \ln N$, $b = \ln C$, тогда (14) переходит в линейную функцию

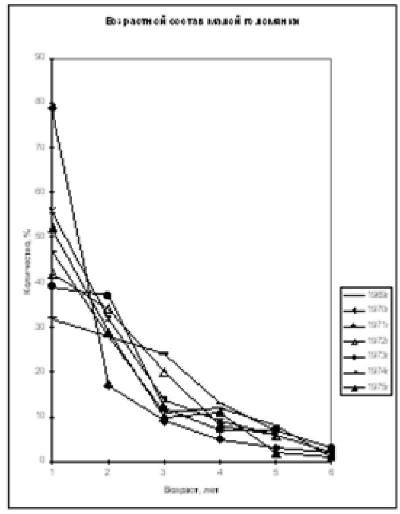
$$y = b - \lambda x. \tag{15}$$

Для определения значений параметров λ и b для каждой из популяций применялся метод наименьших квадратов. Оценка параметров проводилась по усредненным за многолетний период данным (1969–1975 гг.).

Задача оценки параметров имеет вид



а



б

Соотношение численностей особей разных возрастов для популяций большой (а) и малой (б) голомянок в уловах, в %, на основе отловов за 1969–1975 гг.

$$f(\xi) = \sum_{1}^{6} h_j \xi_j^2 \to \min, \tag{16}$$

где

$$\xi_j = y_j + \lambda x_j - b, j = 1, ..., 6. \tag{17}$$

Для оценки диапазона возможных значений параметра при разных весовых коэффициентах, необходимо перебрать все ситуации с максимальными наборами нулевых компонент векторов невязок. В данном случае их 15. Эти расчеты показали [12], что для большой голомянки возможные оценки коэффициента смертности по всем приведенным выше правилам будут находится в диапазоне [0,2 – 0,62]. Для малой голомянки диапазон составляет [0,53 – 0,79]. В результате специальных исследований на основе многократных вычислительных экспериментов было показано, что для рассматриваемого здесь способа оценки параметров целесообразно использование весовых коэффициентов пропорциональных оценкам численности рыб данной возрастной группы [13; 14]. В итоге получаем коэффициент смертности для большой голомянки 0,43. Для малой голомянки 0,68.

На последующих этапах формирования автономных моделей динамики большой и малой голомянок учитывается существующий у них каннибализм, а также изменения численности сеголеток в результате изменений численности мальков, зависящей в том числе от численности рыб данного вида в половозрелом возрасте в предыдущие годы. Одним из важных источников информации в этих оценках являются данные о структуре питания отдельных видов рыб, а также исследования поведения поэтапно формируемой модели [1; 2].

Список использованной литературы

1. Зоркальцев В.И. Моделирование пелагического сообщества озера Байкал / В.И. Зоркальцев, И.В. Мокрый, А.В. Казазаева. — EDN NDIAGT // Вычислительные технологии. — 2011. — Т. 16, № 1. — С. 48–66.

2. Казазаева А.В. Технология математического моделирования сложных систем на примере пелагического сообщества озера Байкал / А.З. Казазаева. — EDN RCHNZZ // Современные технологии. Системный анализ. Моделирование. — 2013. — № 3 (39). — С. 193–198.

3. Мокрый И.В. Имитационная модель динамики численности популяций макрогектопуса, большой и малой голомянок / И.В. Мокрый, А.В. Кузнецова, Е.П. Тереза // Математические и информационные технологии в энергетике, экономике, экологии : материалы Всерос. конф., Иркутск, 12 июля 2003 г. — Иркутск, 2003. — Т. 1. — С. 77–87.

4. Зоркальцев В.И. Методика оценки и согласования параметров математических моделей / В.И. Зоркальцев, А.В. Казазаева. — Иркутск : ИСЭМ СО РАН, 2014. — 22 с. — EDN TAVURH.

5. Зоркальцев В.И. Метод наименьших квадратов: геометрические свойства, альтернативные подходы, приложения / В.И. Зоркальцев. — Новосибирск : Наука, 1995. — 220 с. — EDN RWKFWN.

6. Зоркальцев В.И. Чебышевские приближения могут обходиться без условия Хаара / В.И. Зоркальцев. — EDN ZDKYJK // Динамические системы, оптимальное управление и математическое моделирование : материалы Междунар. симпозиума, Иркутск, 7 окт. 2019 г. — Иркутск, 2019. — С. 29–33.

7. Мудров В.И. Методы обработки измерений. Квазиправдоподобные оценки / В.И. Мудров, В.Л. Кушко. — Москва : Радио и связь, 1983. — 304 с.

8. Зоркальцев В.И. Октаэдрические и евклидовы проекции точки на линейное многообразие / В.И. Зоркальцев. — EDN PCNKLX // Труды института математики и механники УрО РАН. — 2012. — Т. 18, № 3. — С. 106–118.

9. Стариков Г.В. Голомянки Байкала / Г.В. Стариков. — Новосибирск : Наука, 1977. — 93 с.

10. Баранов Ф.И. К вопросу о биологических основаниях рыбного хозяйства / Ф.И. Баранов // Известия Отдела Рыбоводства и научно-промысловых исследований. — 1918. — Т. 1. — Вып. 1. — С. 84–128.

11. Северцов С.А. Динамика населения и приспособительная эволюция животных / С.А. Северцов. — Москва : Изд-во АН СССР, 1941. — 316 с.

12. Бычков И.В. Весовые коэффициенты в методе взвешенных наименьших квадратов / И.В. Бычков, В.И. Зоркальцев, А.В. Казазаева. — DOI 10.15372/SJNM20150303. — EDN UDEGGZ // Сибирский журнал вычислительной математики. — 2015. — Т. 18, № 3. — С. 271–284.

13. Бычков И.В. Сопоставление методов оценки параметров усеченного экспоненциального закона распределения / И.В. Бычков, В.И. Зоркальцев, И.В. Мокрый. — DOI 10.25743/ICT.2018.23.5.002. — EDN YLVISL // Вычислительные технологии. — 2018. — Т. 23, № 5. — С. 3–20.

14. Зоркальцев В.И. Сравнительный анализ методов оценки динамики смертности рыб озера Байкал на основе вычислительных экспериментов / В.И. Зоркальцев, А.С. Князев. — DOI 10.22250/9785934933921_91. — EDN QOJGXJ // Вычислительные технологии и прикладная математика : материалы II Междунар. семинара, Благовещенск, 12 июня 2023 г. — Благовещенск, 2023. — С. 91–94.

References

1. Zorkal'tsev V.I., Mokryi I.V., Kazazaeva A.V. Modeling of the Lake Baikal Pelagic Community Ecosystem. *Vychislitel'nye tekhnologii = Computing technologies*, 2011, vol. 16, no. 1, pp. 48–66. EDN: NDIAGT. (In Russian). EDN: NDIAGT.

2. Kazazaeva A.V. Mathematical Modeling Technology Regarding Closed Water Biosystems on the Example of the Example of the Lake Baikal Pelagic Association. *Sovremennye tekhnologii. Sistemnyi analiz. Modelirovanie = Modern Technologies. System Analysis. Modeling*, 2013, no. 3, pp. 193–198. (In Russian). EDN: RCHNZZ.

3. Mokryi I.V., Kuznetsova A.V., Tereza E.P. Simulation model of population dynamics of Macrohectopus, large and small golomyanka. Mathematical and information technologies in energy, economics, ecology: materials of the All-Russian conference. *Materials of International Scientific Conference, Irkutsk, July 12, 2003.* Irkutsk, 2003, vol. 1, pp. 77–87. (In Russian).

4. Zorkal'tsev V.I., Kazazaeva A.V. *Methodology for estimating and agreeing parameters of mathematical models.* Irkutsk, Melentiev Energy Systems Institute Siberian Publ., 2014, 22 p. EDN: TAVURH.

5. Zorkal'tsev V.I. *Method of Least Squares: Geometrical Properties, Alternative Approaches, Applications*. Novosibirsk, Nauka Publ., 1995, 220 p. EDN: RWKFWN.

6. Zorkal'tsev V.I. Chebyshev approximations can do without the Haar condition. Dynamic systems, optimal control and mathematical modeling. *Materials proceedings of the International Symposium, Irkutsk, October 7, 2019.* Irkutsk, 2019, pp. 29–33. (In Russian). EDN: ZDKYJK.

7. Mudrov V.I., Kushko V.L. *Measurement processing methods. Quasi-plausible estimates.* Moscow, Radio i svyaz' Publ., 1983. 304 p.

8. Zorkal'tsev V.I. Octahedral and Euclidean projections of a point onto a linear manifold. Trudy instituta matematiki i mekhanniki URO RAN = Proceedings of the Institute of Mathematics and Mechanics of the Ural Branch of the Russian Academy of Sciences, 2012, vol. 18, no. 3, pp. 106–118. (In Russian). EDN: PCNKLX

9. Starikov G.V. *Golomyanki of Baikal*. Novosibirsk, Nauka Publ., 1977. 93 p.

10. Baranov F.I. On the question of the biological foundations of fisheries. Izv. Dept. Fish farming and scientific and commercial research, 1918, vol. 1, iss. 1, pp. 84–128. (In Russian).

11. Severtsov S.A. *Population dynamics and adaptive evolution of animals.* Moscow, Akademiya nauk SSSR Publ., 1941. 316 p.

12. Bychkov I.V., Zorkal'tsev V.I., Kazazaeva A.V. Weight Coefficients in the Weighted Least Squares Method. *Sibirskii zhurnal vychislitel'noi matematiki = Siberian Journal of Computational Mathematics,*2015, vol. 18, no. 3, pp. 271–284. (In Russian). EDN: UDEGGZ. DOI: 10.15372/SJNM20150303.

13. Bychkov I.V., Zorkal'tsev V.I., Mokryi I.V. Comparison of methods for estimating parameters of a truncated exponential distribution law. Vychislitel'nye tekhnologii = Computing technologies, 2018, vol. 23, no. 5, pp. 3–20. (In Russian). EDN: YLVISL. DOI: 10.25743/ICT.2018.23.5.002.

14. Zorkal'tsev V.I., Knyazev A.S. Comparative Analysis of Methods for Assessing the Dynamics of Mortality of Lake Baikal Fish Based on Computational Experiments. *Computational technology and applied mathematics. Materials proceedings of the II International seminar, Blagoveshchensk, June 12, 2023.* Blagoveshchensk, 2023, pp. 91–94. (In Russian). EDN: QOJGXJ. DOI: 10.22250/978 5934933921_91.

Информация об авторе

Казазаева Анна Васильевна — аспирант, кафедра математических методов и цифровых технологий, Байкальский государственный университет, г. Иркутск, Российская Федерация, e-mail: kuz-ann@yandex.ru.

Information about the Author

Anna V. Kazazaeva — PhD Student, Department of Mathematical Methods and Digital Technologies, Baikal State University, Irkutsk, the Russian Federation, e-mail: kuz-ann@yandex.ru.

Для цитирования

Казазаева А.В. Проблемы и методы оценки параметров математических моделей / А.В. Казазаева. — DOI 10.17150/2713-1734.2024.6(1).5-16 — EDN IMTELI // System Analysis & Mathematical Modeling. — 2024. — Т. 6, № 1. — С. 5–16.

For Citation

Kazazaeva A.V. Problems and Methods of Estimation of Parameters of Mathematical Models. *System Analysis & Mathematical Modeling*, 2024, vol. 6, no. 1, pp. 5–16. (In Russian). EDN: IMTELI. DOI: 10.17150/2713-1734.2024.6(1).5-16.