Научная статья
УДК 519.2
EDN QRLEXO
DOI 10.17150/2713-1734.2023.5(4).505-512

Т.И. Ведерникова
Байкальский государственный университет,
г. Иркутск, Российская Федерация

Закон распределения вероятностей фунции модуля разности дискретных случайных величин

Аннотация. Использование символа абсолютного значения в теоретических исследованиях часто приводит к затруднениям в аналитических операциях. Однако с практической точки зрения, преобразования, базирующиеся на абсолютных разностях, наиболее наглядны и эффективны. В статье рассматриваются функциональные преобразования, представляющие собой модули разностей дискретных случайных величин. Дается понятие модуля первой разности. Найдены законы распределения вероятностей случайных величин, получаемых как модуль разности двух независимых случайных величин, имеющих одинаковое дискретное распределение (Бернулли или геометрическое), а также законы распределения новых случайных величин, представляющих собой суммы модулей первой разности. Вычислены основные числовые характеристики новых случайных величин.

Ключевые слова. Дискретная случайная величина, независимость случайных величин, закон распределения вероятностей, функциональное преобразование, абсолютная величина, модуль первой разности.

Информация о статье. Дата поступления: 14 ноября 2023 г.; дата принятия к публикации: 20 ноября 2023 г.; дата онлайн-размещения: 12 декабря 2023 г.

Original article

T.I. Vedernikova
Baikal State University,
Irkutsk, Russian Federation

Law of Probability Distribution Function of The Module of Difference of Discrete Random Variables

Abstract. The use of the absolute value symbol in theoretical studies often leads to difficulties in analytical operations. However, from a practical point of view, transformations based on absolute differences are the most visual and effective. The article discusses functional transformations, which are modules of the differences of discrete random variables.

The concept of the first difference modulus is given. The laws of the probability distribution of random variables obtained as the modulus of the difference of two independent random variables that have the same discrete distribution (Bernoulli or geometric), as well as the distribution laws of new random variables that are the sums of the moduli of the first difference, have been found. The main numerical characteristics of new random variables are calculated.

Keywords. Discrete random variable, independence of random variables, probability distribution law, functional transformation, absolute value, first difference modulus.

Article info. Received 14 November, 2023; Accepted 20 November, 2023; Available online 12 December, 2023.

ISSN 2713-1734

Введение

Функциональным преобразованиям случайных величин посвящена обширная литература по теории вероятностей и ее приложениям. В статье рассматриваются функциональные преобразования, представляющие собой модули разностей дискретных случайных величин. Использование символа абсолютного значения в теоретических исследованиях часто приводит к затруднениям в аналитических операциях. Однако с практической точки зрения, преобразования, базирующиеся на абсолютных разностях, наиболее наглядны и эффективны.

Реальный объект довольно часто характеризуется параметрами, принимающими целочисленные значения. Моделью такого объекта может быть многомерная случайная величина

$$\xi = \left\{ \xi_1, \xi_2, ..., \xi_n \right\}. \tag{1}$$

Работа посвящена исследованию поведения случайной величины (называемой модулем первой разности [1])

$$\eta = |a - b|, \tag{2}$$

когда в качестве a и b берутся компоненты вектора (1), и новой случайной величины, представляющей собой сумму независимых величин вида (2).

Общий случай

Известно [2], что разность двух независимых дискретных случайных величин $\eta = \xi_1 - \xi_2$ вычисляется по формуле:

$$P\{\eta = t\} = \sum_{k}^{\infty} P\{\xi_1 = k\} \cdot P\{\xi_2 = k - t\};\ t = 0,\ 1,\ 2,\ .... \tag{3}$$

Пусть компоненты многомерной случайной величины (1) независимые, неотрицательные, целочисленные случайные величины и имеют одинаковый закон распределения вероятностей

$$P(t) = P\{ \xi_i = t\};\ i = \overline{1, n};\ t = 0,\ 1,\ 2,\ ....$$

Согласно (2) модуль первой разности любых компонент вектора (1) есть новая случайная величина

$$\eta = \left| \xi_i - \xi_j \right|;\ i, j = \overline{1, n};\ i \neq j. \tag{4}$$

Для отыскания закона распределения η воспользуемся определением независимости дискретных случайных величин [2], применив его для двух случаев: 1) $\xi_i \geq \xi_j$, 2) $\xi_i < \xi_j$.

В первом случае (обозначим $\overline{\eta} = \xi_i - \xi_j \geq 0$) имеем:

$$P\left\{\overline{\eta} = t\right\} = \sum_{k=0}^{\infty} P\{ \xi_i = k + t\} \cdot P\{ \xi_j = k\} = \sum_{k=0}^{\infty} P\{ k + t\} \times$$

$$\times P\left\{k\right\};\ t = 0,\ 1,\ 2,\ \dots .$$

Во втором случае ($\overline{\eta} = \xi_i - \xi_j < 0$) получаем:

$$P\left\{\overline{\eta} = -t\right\} = \sum_{k=0}^{\infty} P\left\{\xi_i = k\right\} \cdot P\left\{\xi_j = k + t\right\} =$$

$$= \sum_{r=0}^{\infty} P\left\{k + t\right\} \cdot P\left\{k\right\};\ t = 1,\ 2, \dots .$$

Отсюда находим, что

$$P\left\{\eta = 0\right\} = P\left\{\overline{\eta} = 0\right\};$$

$$P\left\{\eta = t\right\} = P\left\{\overline{\eta} = t\right\} + P\left\{\overline{\eta} = -t\right\};\ t = 1,\ 2,\ \dots$$

и окончательно имеем

$$P\left\{\eta = t\right\} = \begin{cases} \sum\limits_{k=0}^{\infty} \left(P(k)\right)^2;\ t = 0; \\ 2\sum\limits_{k=0}^{\infty} P(k) \cdot P\left(k + t\right);\ t = 1,\ 2,\ 3,\ \dots \end{cases} . \tag{5}$$

Таким образом, доказано утверждение.

Утверждение. Если компоненты многомерной случайной величины $\xi = \left\{\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n\right\}$ независимые неотрицательные целочисленные случайные величины с одинаковым распределением

$$P(t) = P\left\{\xi_i = t\right\};\ i = \overline{1, n};\ t = 0,\ 1,\ 2,\ \dots ,$$

то закон распределения вероятностей величин η, получаемых как сумма модулей первых разностей вида (2), задается формулой (5).

Из этого утверждения, как следствие, вытекают распределения случайных величин, которые строятся на основе модуля первой разности, когда компоненты вектора (1) имеют известные законы распределения вероятностей.

Бернуллиевский случай

Следствие 1. Если компоненты многомерной случайной величины $\xi = \left\{\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n\right\}$ независимы и имеют распределение Бернулли с параметром p, то величины, получаемые как модули первых разностей, также являются бернуллиевскими.

Доказательство. Случайные величины $\xi_i;\ i = \overline{1, n}$ имеют распределение Бернулли с параметром p, т.е.

$$P\left\{\xi_i = k\right\} = p^k q^{1-k};\ p + q = 1;\ k = 0,\ 1. \tag{6}$$

Область значений величины (4) легко отыскивается:

$$\eta = 0, \text{ если } \xi_i = \xi_j,$$
$$\eta = 1, \text{ если } \xi_i \neq \xi_j;\ i, j = \overline{1, n};\ i \neq j\ .$$

Подставляя (6) в (5), найдем закон распределения вероятностей случайной величины (4):

$$P\{\eta = 0\} = \sum_{k=0}^{1}\left(p^k q^{1-k}\right)^2 = q^2 + p^2,$$

$$P\{\eta = t = 1\} = 2\sum_{k=0}^{1}\left(p^k q^{1-k}\right)\cdot\left(p^{k+t} q^{1-k+t}\right) = 2pq = p_\eta..$$

Проверим условие нормировки:

$$P\{\eta = 0\} + P\{\eta = 1\} = q^2 + p^2 + 2qp = (q+p)^2 = 1,$$
$$P\{\eta = 0\} = 1 - p_\eta.$$

Таким образом, величина η принимает два значения: 0 и 1, одно с вероятностью p_η, другое с вероятностью $(1 - p_\eta)$, что отвечает определению распределения Бернулли. Что и требовалось доказать.

Введем новую случайную величину Y, представляющую собой сумму модулей первых разностей

$$Y = \sum_{i=1}^{r}\left|\xi_i - \xi_{n-i+1}\right|;\ r = \left[\frac{n}{2}\right]. \tag{7}$$

Следствие 2. Если компоненты многомерной случайной величины $\xi = \{\xi_1, \xi_2, ..., \xi_n\}$ независимы и распределены по закону Бернулли с параметром p, то случайная величина (7) имеет биномиальное распределение с параметрами $([n/2], 2pq)$.

Доказательство. Перепишем (7) в виде

$$Y = \eta_1 + \eta_2 + ... + \eta_r,$$

где

$$\eta_i = \left|\xi_i - \xi_j\right|;\ i = \overline{1, n}; j = n - i + 1,$$

На основании Следствия 1 все η_i, $i = \overline{1, r}$ имеют распределение Бернулли с параметром $p_\eta = 2pq$ и в силу своей конструкции

$$\left\{\eta_1 = \left|\xi_1 - \xi_n\right|, \eta_2 = \left|\xi_2 - \xi_{n-1}\right|, ..., \eta_r = \left|\xi_r - \xi_{n-r+1}\right|\right\} \tag{8}$$

являются независимыми. Таким образом, случайная величина Y представляет собой сумму r независимых беруллиевских случайных величин. Следовательно, она имеет биномиальное распределение

$$P\{Y = k\} = p_\eta^k q_\eta^{1-k};\ p_\eta + q_\eta = 1;\ k = \overline{1, r};\ r > 1,$$

$$\text{где } p_\eta = 2pq,\ r = \left[\frac{n}{2}\right].$$

Следствие доказано.

Случай с геометрическим распределением

Следствие 3. Если компоненты многомерной случайной величины $\xi = \{\xi_1, \xi_2, ..., \xi_n\}$ независимы и имеют геометрическое распределение с параметром p, то величины (1), получаемые как модули первых разностей, задаются распределением

$$P\{\eta = t\} = \begin{cases} \dfrac{p}{1+q};\ t = 0; \\ \dfrac{2pq^t}{1+q};\ t = 1, 2, 3, ... \end{cases}. \tag{9}$$

Доказательство. Компоненты в (1) независимы и имеют геометрическое распределение

$$P\{\xi_i = k\} = pq^k;\ p + q = 1;\ k = 0, 1, 2, 3, ...$$

Для отыскания закона распределения вероятностей случайной величины вида (4) воспользуемся формулой (5). Тогда получим, что

$$P\{\eta = 0\} = \sum_{k=0}^{\infty}\left(pq^k\right)^2 = p^2\sum_{k=0}^{\infty}\left(q^2\right)^k = \frac{p^2}{1-q^2} = \frac{p}{1+q};\ t = 0;$$

$$P\{\eta = t\} = 2\sum_{k=0}^{\infty} pq^{k+t}pq^k = 2p^2q^t\sum_{k=0}^{\infty}\left(q^2\right)^k =$$

$$= \frac{2pq^t}{1+q};\ t = 1, 2, 3, ...$$

Что и требовалось доказать.

Для исследования свойств новой случайной величины η найдем производящую функцию вероятностей (ПФВ) [3] распределения (9). По определению ПФВ есть

$$v_\eta(s) = M\left[s^\eta\right] = \sum_{t=0}^{\infty} s^t P\{\eta = t\}.$$

Применительно к нашему случаю имеем

$$v_\eta(s) = s^0 P\{\eta = 0\} + \sum_{t=1}^{\infty} s^t P\{\eta = t\} = \frac{p}{1+q} + \frac{2p}{1+q}\sum_{t=1}^{\infty} s^t q^t =$$

ISSN 2713-1734

$$= \frac{p}{1+q}\left(1 + 2\sum_{t=1}^{\infty}(sq)^{t}\right) = \frac{p}{1+q}\left(2\sum_{t=1}^{\infty}(sq)^{t} - 1\right) = \qquad .$$

$$\ldots = \frac{p}{1+q}\left(\frac{2}{1-sq} - 1\right) = \frac{p(1+sq)}{(1+q)\cdot(1-sq)}.$$

Используя свойства производящей функции вероятностей [3], найдем математическое ожидание и дисперсию случайной величины η

$$M[\eta] = \left(v_{\eta}(s)\right)'_{s=1} = \left(\frac{p(1+sq)}{(1+q)\cdot(1-sq)}\right)' = \frac{2q}{1-q^{2}},$$

$$D[\eta] = \left\{\left(v_{\eta}(s)\right)'' + \left(v_{\eta}(s)\right)' - \left[\left(v_{\eta}(s)\right)'\right]^{2}\right\}_{s=1} = \frac{2q\left(1+q^{2}\right)}{\left(1-q^{2}\right)^{2}}.$$

Известно, что ПФВ для суммы независимых случайных величин (каковыми являются в силу своей конструкции (8) модули разностей в (7)) равняется произведению производящих функций слагаемых. Тогда производящая функция случайной величины Y будет иметь вид

$$v_{Y}(s) = v_{\eta_1+\eta_2+\ldots+\eta_r}(s) = v_{\eta_1}(s)\cdot v_{\eta_2}(s)\cdot\ldots\cdot v_{\eta_r}(s) =$$

$$= \left(\frac{p(1+sq)}{(1+q)\cdot(1-sq)}\right)^{r};\ r = \left[\frac{n}{2}\right].$$

Вычислим числовые характеристики случайной величины Y, когда компоненты вектора (1) имеют геометрическое распределение с параметром p. Математическое ожидание от суммы случайных величин равняется сумме их математических ожиданий, следовательно

$$M[Y] = M[\eta_1] + M[\eta_2] + \ldots + M[\eta_r] = \frac{2rq}{1-q^{2}} = \frac{nq}{1-q^{2}}.$$

Дисперсия от суммы независимых случайных величин (каковыми являются $\eta_i,\ i = \overline{1, r}$) также равна сумме дисперсий слагаемых:

$$D[Y] = \left\{\left(v_{Y}(s)\right)'' + \left(v_{Y}(s)\right)' - \left[\left(v_{Y}(s)\right)'\right]^{2}\right\}_{s=1} =$$

$$= \frac{2rq\left(1 + q^2\right)}{\left(1 - q^2\right)^2} = \frac{nq\left(1 + q^2\right)}{\left(1 - q^2\right)^2}.$$

Заключение

Многомерная случайная величина является распространенной моделью в теоретических и прикладных исследованиях. При этом наблюдения представляют собой многомерные временные ряды. Работать с многомерными рядами наблюдений сложнее, чем с одномерными. Поэтому часто приходится решать задачу снижения размерности. Преобразования вида (7) позволяют свести многомерную случайную величину к одномерной, которая аккумулирует в себе особенности многомерной величины (1). Выполнить анализ свойств одномерной величины значительно проще, чем многомерной.

Список использованной литературы

1. Ведерникова Т. И. Способы построения рабочего словаря признаков для решения задач идентификации / Т. И. Ведерникова. — EDN PDFXLR // Известия Иркутской государственной экономической академии (Байкальский государственный университет экономики и права). — 2012. — № 4. — С. 32.

2. Гнеденко Б.В. Курс теории вероятностей / Б.В. Гнеденко. — 7-е изд., исправл. — Москва : Эдиториал УРСС,2001 — 448 с.

3. Хамитов Г.П. Производящие функции в теории вероятностей / Г.П. Хамитов. — Новосибирск : Изд-во СО РАН, 1999. — 126 с.

References

1. Vedernikova T.I. Ways of Creating a Working Dictionary of Features for Solving Identification Problems. *Izvestiya Irkutskoy gosudarstvennoy ekonomicheskoy akademii (Baykalskiy gosudarstvennyy universitet ekonomiki i prava) = Izvestiya of Irkutsk State Economics Academy (Baikal State University of Economics and Law*), 2012, no.4, pp. 32. (In Russian). EDN: PDFXLR.

2. Gnedenko B.V. *Probability theory course.*7th ed. Moscow, Editorial URSS Publ., 2001. 448 p.

3. Khamitov G.P. *Generating functions in probability theory.* Novosibirsk, Publishing House of Siberian Branch of the Russian Academy of Sciences Publ., 1999. 126 p.

Информация об авторе

Ведерникова Татьяна Ивановна — кандидат технических наук, доцент, кафедра математических методов и цифровых технологий, Байкальский государственный университет, г. Иркутск, Российская Федерация, e-mail: VedernikovaTI@bgu.ru.

Information about the Author

Tatyana I. Vedernikova — PhD in in Technical Sciences, Associate Professor, Department of Mathematical Methods and Digital Technologies, Baikal State University, Irkutsk, Russian Federation, e-mail: VedernikovaTI@bgu.ru.

Для цитирования

Ведерникова Т.И. Закон распределения вероятностей функции модуля разности дискретных случайных величин / Т.И. Ведерникова. — DOI 10.17150/2713-1734.2023.5(4).505-512. — EDN QRLEXO // System Analysis & Mathematical Modeling. — 2023. — Т. 5, № 4. — С. 505–512.

For Citation

Vedernikova T.I. Law of Probability Distribution Function of The Module of Difference of Discrete Random Variables. *System Analysis & Mathematical Modeling*, 2023, vol. 5, no. 4, pp. 505–512. (In Russian). EDN: QRLEXO. DOI: 10.17150/2713-1734.2023.5(4).505-512.