ISSN 2713-1734

Научная статья
УДК 519.24
EDN WDEIME
DOI 10.17150/2713-1734.2023.5(3).350-366

В.И. Зоркальцев
Байкальский государственный университет,
г. Иркутск, Российская Федерация
А.С. Князев
Байкальский государственный университет,
г. Иркутск, Российская Федерация

Сравнительный анализ алгоритмов оценки параметров закона распределения случайной величины на основе вычислительных экспериментов

Аннотация. Излагается методика исследования алгоритмов оценки параметров закона распределения случайной величины по располагаемым конечным наборам наблюдениям. Обсуждаемая методика разрабатывалась в связи с задачей выбора наиболее эффективных способов оценки динамики изменений численности рыб озера Байкал. Одним из источников информации для описания динамики численности рыб является их возрастной состав в экспериментальных отловах. На основе этих данных оцениваются параметры предполагаемых законов распределения случайной величины возраста рыб на данный момент и динамики изменения численности рыб в предыдущие года.

Обсуждаемая методика основывается на вычислительных экспериментах с использованием метода Монте-Карло для имитации случайных выборок рыб. По предлагаемой методике анализируются девять алгоритмов оценки параметров усеченного экспоненциального закона распределения при различных объемах выборок. В качестве конкретного приложения рассматривается задача оценки динамики смертности голомянки, основной по биомассе рыбы озера Байкал.

Ключевые слова. Проблемы оценки динамики смертности рыб, озеро Байкал, голомянка, сравнительный анализ алгоритмов оценки параметров усеченного закона распределения, вычислительный эксперимент, метод Монте-Карло.

Информация о статье. Дата поступления: 1 июня 2023 г.; дата принятия к публикации: 19 июня 2023 г.; дата онлайн-размещения: 28 сентября 2023 г.

Original article

V.I. Zorkaltsev
Baikal State University,
Irkutsk, Russian Federation
A.S. Knyazev
Baikal State University,
Irkutsk, Russian Federation

Comparative Analysis of Algorithms For Estimating the Parameters of the Random Variable Distribution Law Based on Computational Experiments

Abstract. The study presents the methodology of the study of algorithms for estimating the parameters of the distribution law of a random variable based on available finite sets of observations. The discussed methodology was developed in order to choose the most effective ways to assess the dynamics of changes in the number of fish in Lake Baikal. One of the sources of information for describing the dynamics of the number of fish is their age composition in experimental catches. Based on these data, the parameters of the assumed laws of distribution of the random variable of the age of fish at the moment and the dynamics of changes in the number of fish in previous years were estimated. The technique under discussion is based on computational experiments using the Monte Carlo method to simulate random samples of fish. According to the proposed methodology, nine algorithms for estimating the parameters of the truncated exponential distribution law for different sample sizes are analyzed.

Keywords. Problems of assessing the dynamics of fish mortality, Lake Baikal, golomyanka, comparative analysis of algorithms for estimating parameters of the truncated distribution law, computational experiment, the Monte Carlo method.

Article info. Received 1 June, 2023; Accepted 19 June, 2023; Available online 28 September, 2023.

В данной статье излагается методика сравнительного анализа алгоритмов обработки данных возрастной структуры случайных выборок рыб озера Байкал для определения показателей динамики смертности рыб. Используя разные алгоритмы, можем получать из одних и тех же исходных данных существенно разные результаты. Возникает проблема, какой из алгоритмов следует выбрать? С этой общей проблемой тесно связаны и другие вопросы. В том числе: как влияет объем используемой выборки на результаты? Какой объем выборки можно считать минимально достаточным для получения надежных результатов? Методику сравнительного анализа алгоритмов будем рассматривать применительно к распределению возрастного состава рыб по усеченному экспоненциальному закону.

Общее описание методики. Оценивать параметры законов распределения случайной величины по располагаемым выборкам можно, как правило, несколькими конкурирующими алгоритмами. В этой связи возникают вопросы о достоинствах и недостатках разных алгоритмах, об их преимуществах и неудобствах. По сложившейся традиции обоснование алгоритмов осуществляется на основе теоретических исследований их свойств при возрастании до бесконечности объемов выборки. Например, используются такие характеристики получаемых оценок, как состоятельность, асимптотическая несмещенность, асимптотическая эффективность [1, 2].

В реальности оценки параметров законов распределения производятся на базе ограниченных объемов выборки. Свойства алгоритмов при возрастании до бесконечности объемов используемой выборки малопригодны в качестве сравнительных характеристик конкурирующих алгоритмов оценки параметров. О неприменимости характеристик оценки параметров, свойственных большим выборкам к реальным ситуациям с ограниченными объемами выборки, писал еще Гаусс [3].

В данной статье излагается методика анализа свойств отдельных алгоритмов оценки параметров законов распределения, исходя из заданного числа элементов объема выборки. Число элементов в выборке может варьироваться, что будет сказываться на изменениях свойств исследуемого алгоритма.

Методика основывается на многократной имитации методом статистических испытаний (методом Монте-Карло) заданного набора случайных реализаций по рассматриваемому закону распределения с одним и тем же фиксированным значением параметров этого закона. Для каждой имитации осуществляется оценка параметров исследуемым алгоритмом. Тем самым получаем множество расчетных реализаций параметров, которое можно рассматривать как набор случайных чисел. По их отклонениям от исходного «истинного» значения параметров можно определять различные статистические характеристики алгоритма оценки параметров.

Естественно, сравнительный анализ алгоритмов должен производиться не при одном конкретном значении параметров, а в некоторой окрестности их значений, что должно достигаться путем варьирования этих значений. В данной статье ограничимся изложением метода исследования свойств алгоритмов только в одной точке. При этом будем исследовать наиболее простые алгоритмы оценки параметров для одного из наиболее простых законов распределения – усеченного экспоненциального закона. В качестве варьируемого показателя в приводимых здесь примерах будем рассматривать только количество элементов в выборке.

Усеченный экспоненциальный закон распределения случайной величины

Согласно этому закону, вероятность случайно пойманной рыбе иметь возраст $t = 1, ..., T$ лет, выражается зависимостью

$$P_t = A(R)^t,\ t = 1, ..., T, \tag{1}$$

где T – заданный максимальный возраст дожития,

$$R = \exp(-\Lambda) \tag{2}$$

– условная вероятность дожития до возраста $t + 1$, для рыбы дожившей до возраста $t = 1, ..., T - 1$. Год T считается последним для рассматриваемых рыб. Здесь Λ – параметр, который принято называть применительно к динамике жизни биологических организмов коэффициентом смертности. Из условия, что сумма вероятностей P_t, $t = 1, ..., T$ равна единице, следует

$$A = (1 - R) / (1 - (R)^{T+1}). \tag{3}$$

Отметим, все приведенные показатели однозначно определяются, если задать значение показателей R из открытого интервала (0,1) или задать некоторое положительное значение Λ.

Оценки указанных параметров будем обозначать такими же, только малыми буквами. Сопоставление будем в данной статье производить по трем возможным методам, каждый из которых в трех вариантах. Итого будет рассматриваться девять конкретных алгоритмов оценки параметров усеченного экспоненциального закона распределения.

В первом методе сначала оценивается коэффициент смертности λ, от которого, исходя из (1)–(3), определяются значения r, a, p_t, $t = 1, ..., T$. Во втором и третьем рассматриваемых здесь методах исходным оцениваемым параметром является условная вероятность r дожития до следующего года для рыбы дожившей до года $t = 1, ..., T - 1$. Затем, из формул (1)–(3), определяются оценки параметров λ, a, p_t.

Интерпретация для биологических объектов

К представленным в данной статье исследованиям методов оценки параметров усеченного экспоненциального закона распределения (и родственных с ним законов) привела необходимость оценок по возрастам численности популяций отдельных видов рыб в озере Бакал (в том числе большой и малой голомянки, омуля, хариуса и др.) на основе данных экспериментальных отловов. Эти оценки были необходимы для формирования моделей динамики изменений численности во времени и по возрастам отдельных видов рыб. Формирование автономных моделей динамики изменений отдельных видов организмов – первый этап в используемой и развиваемой технологии построения математической модели [4–6] экосистемы озера Байкал. На последующих этапах автономные модели дополняются детализациями биологических связей, в том числе через трофические отношения с другими видами организмов.

При построении автономных моделей использовалась гипотеза об экспоненциальном распределении численности рыб по возрастам, к чему приводят следующие три предположения:

– появление каждый год примерно одного и того же количества рыб рассматриваемого вида первого возрастного года;

– неизменность во времени доли выживших за каждый год рыб;

– неизменность доли выживших за данный год рыб каждого возраста.

Этим условиям удовлетворяют в наибольшей степени большая и малая голомянки, составляющие основную биомассу рыб озера Байкал [7]. Эта рыба не является промысловой и поэтому на динамику ее численности никак не влияет интенсивность «законного» или «не законного» вылова, чему подвержены другие виды рыб озера. Рыба ведет не стадный образ жизни, что препятствует распространению каких-либо спорадических инфекционных массовых заболеваний. Поскольку оба вида голомянки нерестятся непосредственно в акватории озера Байкал (они являются «живородящими», т.е. вынашивающими икру внутри себя), то нет никаких особых возмущающих климатических факторов в их воспроизводстве.

Конечно, влияние на численность голомянки должны оказывать изменения кормовой базы, биомассы зоопланктона и, вероятно, отмечаемые некоторые изменения температуры верхних слоев воды озера Байкал. К факторам возможной не стационарности условий существования голомянки является и колебание численности байкальской нерпы. Голомянка является источником питания байкальской нерпы, численность которой варьируется по имеющимся оценкам от 80 до 120 тыс. шт. За длительный многолетний период оба указанные вида колебаний природных условий обитания голомянок можно считать, усредняются.

Усеченный экспоненциальный закон рассматривается только как первое приближение при описании динамики изменений численности рыб по возрастам и во времени. В дальнейшем могут использоваться другие более общие виды распределения, учитывающие возможные изменения коэффициента Λ от возраста, например, распределение Вейсбула [1], а также влияние на динамику численности голомянок изменений природно-климатических и биологических условий в акватории озера Байкал.

Целесообразно различать три причины погрешностей в оценках динамики смертности рыб и в оценках закона распределения по возрастам рыб на данный момент времени.

1. Неадекватность действительности рассматриваемой модели (в данном случае возможное несоответствие усеченному экспоненциальному закону распределения реального распределения рыб данного вида в данный момент времени по возрастам).

2. Погрешности экспериментов, не представительность используемых выборок (случайные отклонения в возрастной структуре выборки, влияние на используемые в расчетах исходные данные времени, места и технологии проведения отловов, погрешностей в определении возраста рыб).

3. Погрешности алгоритмов расчета.

Конечно, желательно уменьшать негативное проявление всех трех возможных источников погрешности. Рассматриваемая в данной статье методика исследования и сравнения алгоритмов нацелена в основном на уменьшение роли третьего вида источников погрешностей.

Варианты алгоритмов оценки параметров

Ниже рассматривается три метода оценки параметров, каждый из которых с тремя вариантами задания весовых коэффициентов. В первых двух методах исходным оцениваемым параметром является условная вероятность r дожития до следующего года $t + 1$ для рыбы, дожившей до года $t = 1, ..., T - 1$. Затем, исходя из формул (1)–(3), определяются оценки остальных параметров λ, a, p_t . В третьем методе сначала оценивается коэффициент смертности λ, от которого, исходя из (1)–(3), определяются значения r, a, p_t, $t = 1, ..., T$.

Конкретизация методики исследования алгоритмов

Методика основывается на многократной имитации случайных выборок рыб в фиксированном количестве N по заданному закону распределения случайной величины возраста рыб. Обозначим N_{ti} — количество рыб возраста t в выборке $i = 1, ..., m$,

$$\sum_{t=1}^{T} N_{ti} = N. \tag{4}$$

В проведенных ниже расчетах использовалось количество выборок $m = 50\ 000$, что было достаточно для получения устойчивых, однозначных результатов. При необходимости количество выборок можно увеличивать.

Случайные выборки, в которых имеют место явные грубые, не логичные выбросы исключаются из рассмотрения. В представленных ниже исследованиях выборка исключалась из анализа, если для одного из значений $t = 1, ..., T - 1$ выполняется неравенство

$$KN_{ti} \le N_{t+1i} \tag{5}$$

при $K = 3$. Конечно, всегда существует некоторая положительная вероятность, что в случайной выборке количество выловленной рыбы возраста t будет значительно меньше количества рыб возраста $t + 1$. Но такая ситуация не типична и затрудняет (и даже порой делает невозможной) оценку параметров закона распределения случайной величины возраста рыб.

Имитация m выборок осуществляется для зафиксированного значения параметров случайных величин, удовлетворяющих условиям (1) – (3). Для каждой случайной реализации осуществляется оценка параметров закона распределения исследуемым алгоритмом. Получаемые оценки параметров R, Λ, A, P_t обозначим r_i, λ_i, a_i, p_t, $t = 1, ..., T$, $i = 1, ..., m$. В разработанном, к настоящему времени, программно-вычислительном комплексе, реализующем обсуждаемую здесь методику рассчитываются следующие показатели, используемые при сравнительном анализе алгоритмов оценки параметров:

– математическое ожидание коэффициента смертности

$$M\lambda = \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m}\lambda_i; \tag{6}$$

– среднее квадратическое (стандартное) отклонение оценок коэффициента смертности от математического ожидания

$$D\lambda = \left(\frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m}(\lambda_i - M\lambda)^2\right)^{0.5}; \tag{7}$$

– среднее квадратическое отклонение от истинного значения параметра

$$Q\lambda = \left(\frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m}(\lambda_i - \Lambda)^2\right)^{0.5}; \tag{8}$$

– вероятность (частота) попадания значений λ_i в 10% интервалы от математического ожидания $M\lambda_i$;

– вероятность (частота) попадания значений λ_i в 10% интервалы от истинного значения Λ;

– медиана, значение λ_i при котором ровно половина оценок λ_i будет меньше этой величины.

Рассматриваемая методика позволяет использовать и другие показатели качества алгоритмов оценки параметров. Например, приведенные показатели можно дополнить аналогичными характеристиками для условной вероятности r дожития до следующего года рыб, доживших до данного возраста.

Исследуемые правила задания весовых коэффициентов

Каждый из трех рассматриваемых далее методов рассматривается в трех вариантах. Эти варианты различаются используемыми в расчетах положительными весовыми коэффициентами h_t:

– неизменные во времени

$$h_t = 1 / (T - 1),\ t = 1, \dots, T; \tag{9}$$

– пропорционально оценкам вероятности p_t

$$h_t = p_t / \sum_{\tau=1}^{T-1} p_\tau, \qquad t = 1, \dots, T; \tag{10}$$

– пропорционально обратным значениям оценок дисперсии случайных величин p_t

$$h_t = (1/(p_t(1-p_t))/(\sum_{\tau=1}^{T-1}(\frac{1}{p_\tau(1-p_\tau)})), t = 1, \dots, T. \quad (11)$$

Согласно этим правилам во всех трех вариантах сумма первых $T - 1$ весовых коэффициентов равна единице, что важно для второго и третьего из рассматриваемых далее методов.

В правилах (10), (11) задаются весовые коэффициенты, зависящие от значений величин p_t, которые предстоит определить с использованием этих же весовых коэффициентов. Это достигается применением итеративной процедуры, включающей на каждой итерации оценку вероятностей p_t и, затем, пересчет с использованием этих оценок весовых коэффициентов по формулам (8) или (9). Этот процесс завершается, когда оценки вероятностей p_t на соседних итерациях не совпадут с заданной точностью. Соответственно совпадут и значения весовых коэффициентов. В качестве исходного начального приближения используются одинаковые, определяемые по формуле (9), весовые коэффициенты.

Три метода оценки параметров

Приведем расчетные формулы рассматриваемых в докладе методов оценки параметров. В этих описаниях индекс номер выборки i опущен. Весовые коэффициенты здесь представлены в общем виде, как определяемые по любому из правил (9), (10), либо (11). Используются относительные величины

$$n_t = N_t / N, t = 1, T..., \quad (12)$$

$$q_t = N_{t+1} / N_t, t = 1, ..., T - 1. \quad (13)$$

1. Оценка коэффициента смертности с использованием метода наименьших квадратов в логарифмической шкале. Сначала определяются значения переменных α, λ в результате безусловной минимизации квадратичной выпуклой функции

$$\varphi(\alpha, \lambda) = \sum_{t=1}^{T} h_t(\ln n_t - \alpha - t\lambda)^2. \quad (14)$$

Исходя из (2), определяется значение

$$r = \exp(-\lambda). \quad (15)$$

На основе (3) пересчитывается значение

$$r = (1 - r) / (1 - (r)^{T+1}). \quad (16)$$

2. Оценка условной вероятности дожития до следующего года в виде взвешенной средней арифметической,

$$r = \sum_{t=1}^{T-1} h_t q_t \cdot \qquad (17)$$

3. Оценка условной вероятности дожития до следующего года в виде взвешенной средней геометрической,

$$r = \prod_{t=1}^{T-1} (q_t)^{h_t} \qquad (18)$$

Исходя из полученной по правилу (17) или по правилу (18) оценки r можем, согласно (2), определить

$$\lambda = -\ln p.$$

Результаты расчетов

Г.В. Стариковым опубликованы [7] данные о структуре численности малой и большой голомянки в отловах, полученных за 7 лет с 1969 по 1975 гг. Из этих данных, усредненных за весь семилетний период, видно, что для описания распределения по возрастам большой и малой голомянки вполне подходит усеченный экспоненциальный закон распределения. При этом для обоих видов голомянки Г. В. Стариковым рассматривался предельный возраст в 8 лет. Полагаем для рассматриваемого далее примера $T = 8$, $\Lambda = 0.44$. Такой коэффициент смертности примерно соответствует усредненному за 7 лет коэффициенту смертности большой голомянки по данным Старикова. Количество объема выборки N в представленных на рис. 1–8 результатах расчета по изложенной выше методике рассматривалось как варьируемая величина в диапазоне от 100 до 500 экземпляров рыб. Ограничимся здесь анализом только трех из приведенных выше шести характеристик алгоритмов расчета.

Математическое ожидания коэффициента смертности

На рис. 1–3 представлены графики изменения математического ожидания коэффициентов смертности $M\lambda$, рассчитываемые по правилу (6) для указанных выше трех методов с тремя правилами взвешивания. Как видно из этих графиков для всех трех методов при всех трех вариантах задания весовых коэффициентом имеет место существенное отклонение математического ожидания оценок коэффициентов смертности от истинного значения коэффициента смертности. Разность

$$\Delta = M\lambda - \Lambda$$

является величиной смещения математического ожидания оценок коэффициента смертности для данного алгоритма оценок. Подчеркнем, что рассматриваемая здесь методика позволяет определять для данного метода точное значение величины смещения для конкретного, конечного объема выборки при заданном значении параметров закона распределения случайной величины. Особенно существенное смещение имеет место для объемов выборки до 300 рыб.

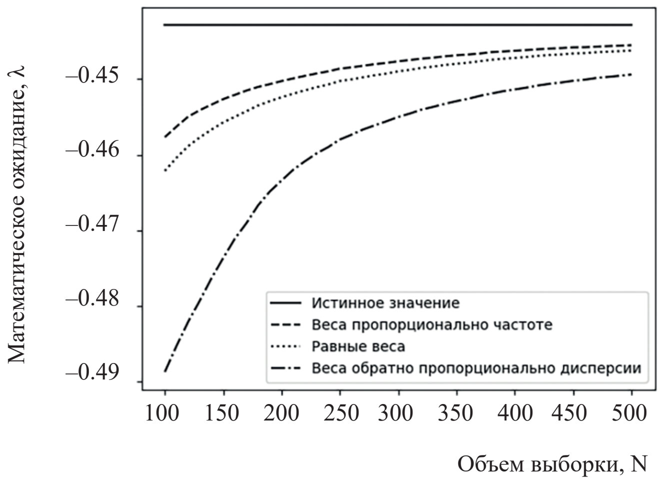

Рис. 1. Математическое ожидание оценок коэффициента смертности при оценке параметров на базе метода наименьших квадратов в логарифмической шкале

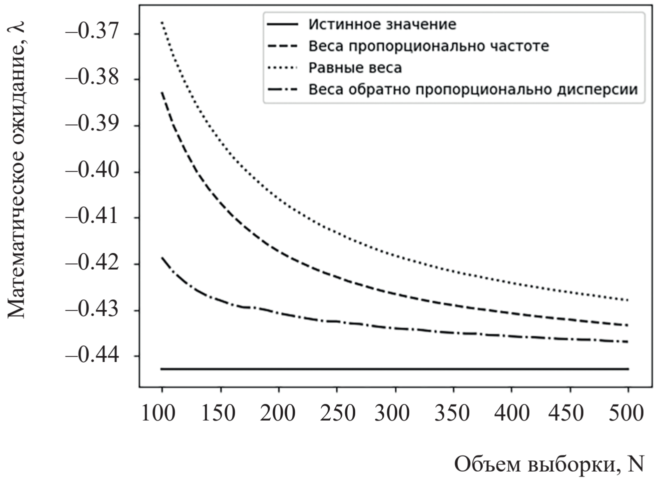

Рис. 2. Математическое ожидание оценок коэффициента смертности при оценках на основе вычисления среднего арифметического соотношений численности соседних возрастов рыб

Для первого и третьего методов наибольшее смещение по абсолютной величине отмечается при третьем способе взвешивания. Второй метод является исключением. Третий способ взвешивания при нем дает наименьшее смещение. Полученные значения $M\lambda$

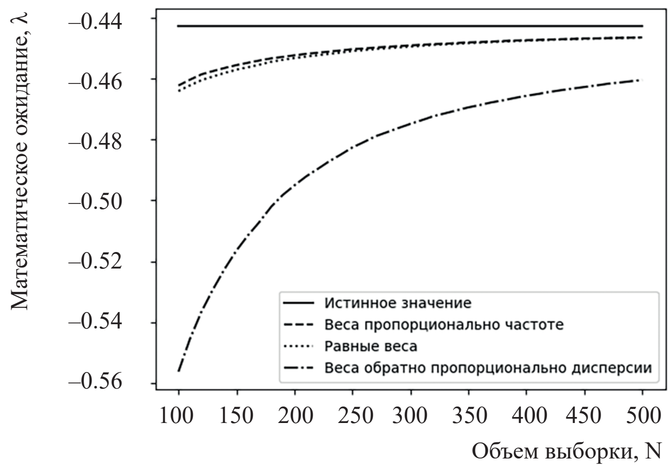

Рис. 3. Математическое ожидание оценок коэффициента смертности при оценках на основе вычисления среднего геометрического соотношений численности соседних возрастов рыб

могут использоваться для корректировки алгоритмов расчета. На значение величины Δ могут корректироваться получаемые оценки коэффициента смертности в целях достижения несмещенных математических ожиданий оценок.

Из приводимых рисунков видно, что наибольшее значение абсолютной величины смещения имеет третий метод при третьем способе взвешивания. При объеме выборки в 400 и более рыб этот же метод дает наименьшее смещение при втором способе взвешивания. Также относительно небольшое смещение дает для объемов выборки в 400 и более рыб первый метод при втором способе взвешивания.

Проблема выбора весов при оценке параметров усеченного экспоненциального метода распределения возраста голомянки первым из изложенных здесь методов обсуждалась в статье [8]. Обычно в литературе по методам математической статистики рекомендуется использовать веса пропорциональные обратным значениям точности измерений показателей, под которой понимается оценка дисперсии измеряемой величины. Это соответствует третьему способу взвешивания, выражаемому формулой (11). В таком случае веса h_t должны возрастать с увеличением t. В то же время имелись весомые аргументы по использованию весов h_t убывающих с увеличением t, изложенные в [8]. А именно в использование весовых коэффициентов (9). В целях более строго обоснования был предложен первый вариант методики сопоставления методов [8], развитием которой является материал, представленный в данной статье.

Представленные на рис. 2 результаты расчетов показывают, что при использовании весов обратно пропорциональных дисперсии получаем значительно более смещенную оценку, чем при использовании неизменных весов и весов пропорциональных вероятности. Также явно большее смещение дает третий способ взвешивания на всем исследованном диапазоне объема выборки имеет для третьего метода оценки (см. рис. 4). При этом для второго метода имеем обратное соотношение (см. рис. 3).

Среднеквадратическое отклонение от математического ожидания

На рис. 4–6 представлены результаты расчета показателя Dλ — среднего квадратического отклонения оценок коэффициента смертности от математического ожидания этих оценок по всем трем рассматриваемым алгоритмам. Из этих рисунков видно, что для всех трех алгоритмов использование третьего способа взвешивания (11) дает существенно большее значение разброса оценок коэффициента смертности, чем использование первых двух способов взвешивания (9) и (10). Представленные результаты позволяют рекомендовать в качестве наилучшего по данному показателю первый из изложенных методов или метод средней геометрической (18) оценки параметров с использованием первого (9) или второго (10) способов взвешивания. Можно отметить также, что стабилизация значений среднеквадратических оценок происходит примерно на уровне 300 экземпляров рыб. Это число может быть рекомендовано в качестве требуемого минимального объема выборки для получения качественных результатов.

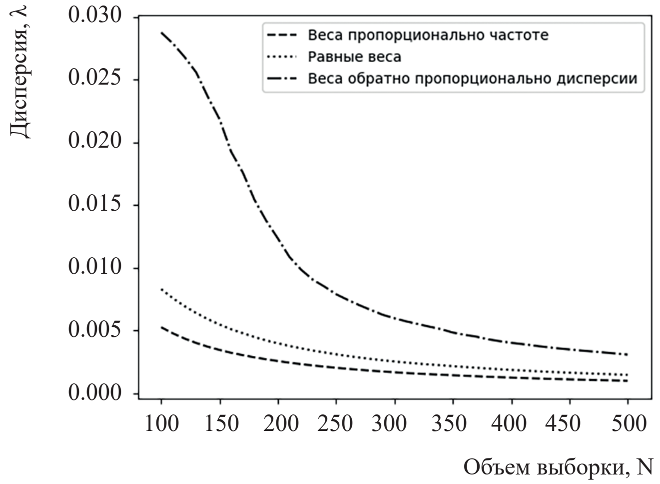

Рис. 4. Дисперсия оценок коэффициента смертности при оценке параметров на базе метода наименьших квадратов в логарифмической шкале

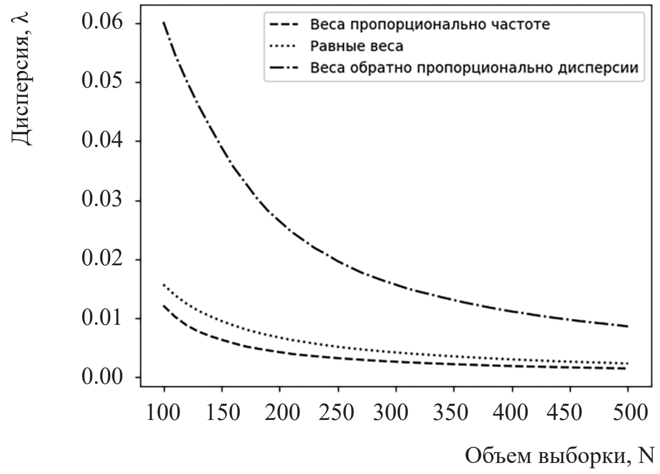

Рис. 5. Дисперсия оценок коэффициента смертности при оценках на основе вычисления среднего арифметического соотношений численности соседних возрастов рыб

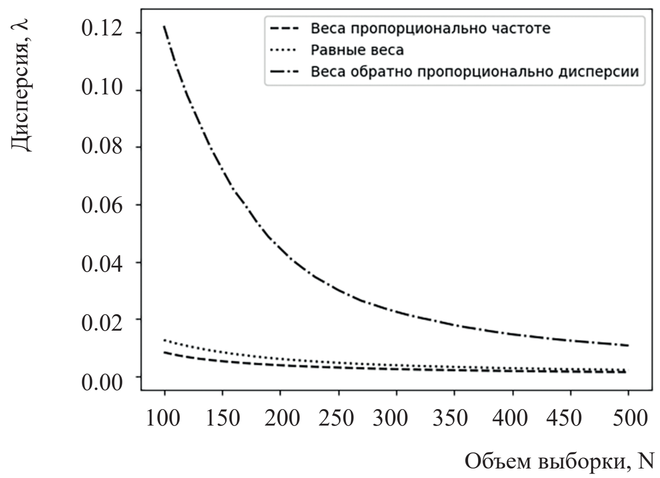

Рис. 6. Дисперсия оценок коэффициента смертности при оценках на основе вычисления среднего геометрического соотношений численности соседних возрастов рыб

Вероятность попадания в десятипроцентный интервал

На рис. 7–9 представлены значения вероятности попадания значений λ_i в интервал отклонений по абсолютной величине на 10% от истинного значения Λ. Из приведенных графиков видно, что для всех трех методов явно наихудшим является третий способ взвешивания. Попадание в десятипроцентный интервал при третьем способе задания весовых коэффициентов оказалось в пол-

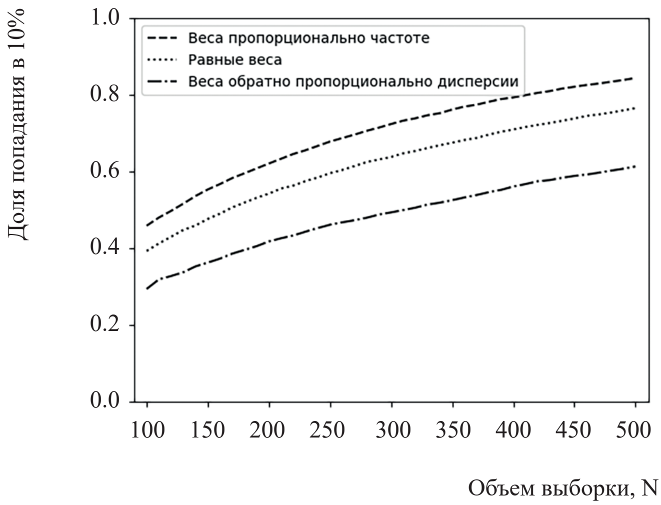

Рис. 7. Вероятность попадания в 10% интервал оценок коэффициента смертности при оценке параметров на базе метода наименьших квадратов в логарифмической шкале

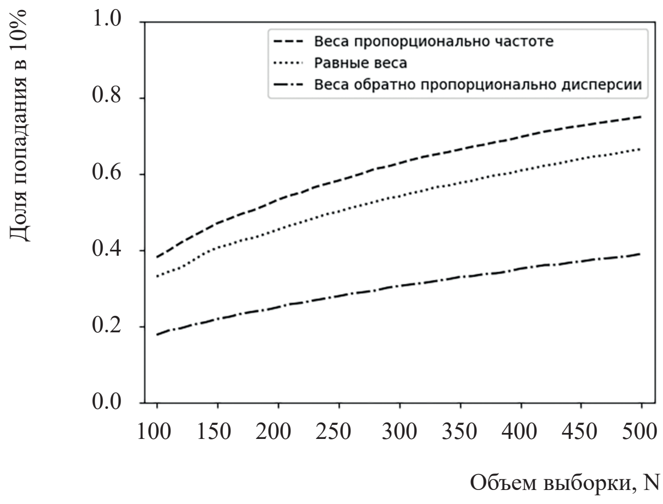

Рис. 8. Вероятность попадания в 10% интервал при оценках на основе вычисления среднего арифметического соотношений численности соседних возрастов рыб

тора-три раза реже, чем при втором способе. Представленные на рис. 7–9 результаты можно считать доказательством явного преимущества второго способа взвешивания.

Из этих рисунков также видна важность правильного выбора объема выборки. При выборке в 500 экземпляров вероятность по-

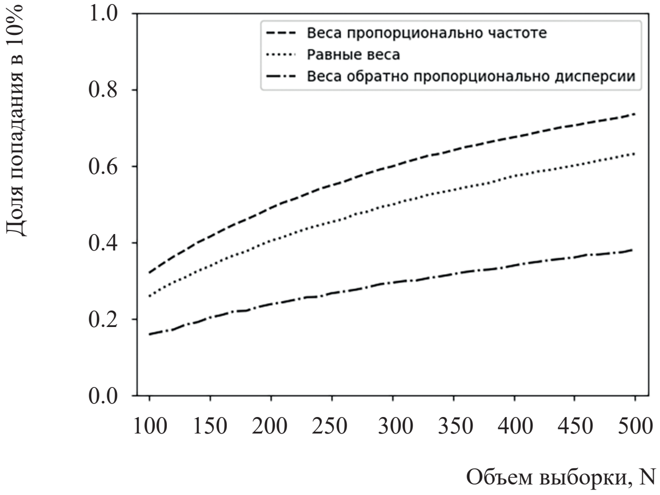

Рис. 9. Вероятность попадания в 10% интервал при оценках на основе вычисления среднего геометрического соотношений численности соседних возрастов рыб

падания в десятипроцентный интервал возрастает примерно в два раза по сравнению с объемом выборки в 100 экземпляров. Можно отметить также некоторое преимущество первого и, затем, третьего метода при втором способе взвешивания. Вероятность попадания в десятипроцентный интервал в этих случаях при выборке в 500 экземпляров достигает 80 %.

Некоторые выводы

1. Представленные результаты расчетов иллюстрируют работоспособность развиваемой методики исследования алгоритмов оценки параметров законов распределения на базе вычислительных экспериментов, а также важность учета объема используемых выборок при оценках параметров законов распределения.

2. Расчеты иллюстрируют преимущество второго способа взвешивания для рассмотренных здесь трех методов оценки параметров

3. Данная методика может использоваться не только для усеченного экспоненциального, но и для других законов распределения случайных величин. Кроме рассмотренных интерес представляет исследование других алгоритмов оценки параметров, например, по методу наименьших квадратов в исходной шкале и по методу максимального правдоподобия. Может быть расширен состав рассчитываемых характеристик алгоритмов оценки параметров.

В дальнейшем планируется осуществить развитие данной методики в том числе в направлении учета возможных ошибок в определении возраста рыб, в использовании других законов распределения и выявления возможных возмущений, приводящих к увеличению или сокращению численности рыб в отдельные годы прошлых лет.

Список использованной литературы

1. Кобзарь А.И. Прикладная математическая статистика / А.И. Кобзарь. — Москва : Физматлит, 2012. — 816 с.

2. Козлов М.В. Введение в математическую статистику / М.В. Козлов, А.В. Прохоров. — Москва : Изд-во МГУ, 1987. — 264 с.

3. Гаусс К.Ф. Избранные геофизические сочинения / К.Ф. Гаусс. — Москва : Геодезиздат, 1967.

4. Мокрый И.В. Исследование связей элиминации и продукции некоторых видов пелагиали оз. Байкал и методы оценки этих характеристик / И.В. Мокрый, В.И. Зоркальцев, О.В. Конева. — Иркутск : Ин-т систем энергетики им. Л.А. Мелентьева, 1999. — 22 с.

5. Формирование системы моделей трофических взаимоотношений в экосистеме пелагиали оз. Байкал / П.Н. Аношко, Э.Л. Афанасьева, Е.В. Дзюба [и др.]. — Иркутск : ИСЭС СО РАН, 1998. — 22 с.

6. Зоркальцев В.И. Моделирование пелагического сообщества экосистемы озера Байкал / В.И. Зоркальцев, И.В. Мокрый, А.В. Казазаева. — EDN NDIAGT // Вычислительные технологии. — 2011. — Т. 16, № 1. — С. 48–60.

7. Стариков Г.В. Голомянки Байкала / Г.В. Стариков. — Новосибирск : Наука, 1977. — 93 с.

8. Бычков И.В. Весовые коэффициенты в методе взвешенных наименьших квадратов / И.В. Бычков, В.И. Зоркальцев, А.В. Казазаева. — DOI 10.15372/SJNM20150303. — EDN UDEGGZ // Сибирский журнал вычислительной математики. — 2015. — № 3. — С. 275–288.

References

1. Kobzar A.I. *Applied mathematical statistics.* Moscow, Fizmatlit Publ., 2012. 816 p.

2. Kozlov M.V., Prohorov A.V. *Introduction into mathematical statistics.* Lomonosov Moscow State University Publ., 1987. 264 p.

3. Gauss C.F. *Selected geophysical writings.* Moscow, Geodezizdat Publ., 1967.

4. Mokryj I.V., Zorkalcev V.I., Koneva O.V. *Investigation of the relationship between elimination and production of some species of the pelagic zone of the lake. Baikal and methods for assessing these characteristics.* Irkutsk, L.A. Melentiev Institute of Energy Systems Publ., 1999. 22 p.

5. Anoshko P.N., Afanaseva Je.L., Dzjuba E.V., Zorkalcev V.I., Koneva O.N., Melnik N.G., Mokryj I.V., Tereza E.P. *Formation of a system of models of trophic relationships in the ecosystem of the pelagic zone of the lake. Baikal.* Irkutsk, L.A. Melentiev Institute of Energy Systems Publ., 1998. 22 p.

6. Zorkaltsev V.I., Mokry I.V., Kazazaeva A.V. Modeling of the Lake Baikal Pelagic Community Ecosystem. *Vychislitel'nye tehnologii = Computational Technologies,* 2011, vol. 16, no. 1, pp. 48–60. (In Russian). EDN: NDIAGT.

7. Starikov G.V. *Golomyanki of the lake Baikal.* Novosibirsk, Nauka Publ., 1977. 93 p.

8. Bychkov I.V., Zorkaltsev V.I., Kazazaeva A.V. Weight Coefficients in the Weighted Least Squares Method. *Sibirskij zhurnal vychislitel'noj matematiki = Siberian Journal of Numerical Mathematics,* 2015, no. 3, pp. 275–288. (In Russian). EDN: UDEGGZ. DOI: 10.15372/SJNM20150303.

Информация об авторах

Зоркальцев Валерий Иванович — доктор технических наук, профессор, заведующий лабораторией математического моделирования, Байкальский государственный университет, г. Иркутск, Российская Федерация, e mail: vizork@mail.ru.

Князев Александр Сергеевич — аспирант, заместитель начальника управления цифровизации и информационно-технического обеспечения, Байкальский государственный университет, г. Иркутск, Российская Федерация, e mail: 010193@bgu.ru.

Information about the Authors

Valeriy I. Zorkaltsev — D.Sc. in Technical Sciences, Professor, Head of the Mathematical Modeling Laboratory, Baikal State University, Irkutsk, Russian Federation, e mail: vizork@mail.ru.

Alexander S. Knyazev — PhD Student, Deputy Head of Digitalization and Information Technology Department, Baikal State University, Irkutsk, Russian Federation, e mail: 010193@bgu.ru.

Вклад авторов

Все авторы сделали эквивалентный вклад в подготовку публикации. Авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.

Contribution of the Authors

The authors contributed equally to this article. The authors declare no conflicts of interests.

Для цитирования

Зоркальцев В.И. Сравнительный анализ алгоритмов оценки параметров закона распределения случайной величины на основе вычислительных экспериментов / В.И. Зоркальцев, А.С. Князев. — DOI 10.17150/2713-1734.2023.5(3).350-366. — EDN WDEIME // System Analysis & Mathematical Modeling. — 2023. — Т. 5, № 3. — С. 350–366.

For Citation

Zorkaltsev V.I., Knyazev A.S. Comparative Analysis of Algorithms for Estimating the Parameters of the Random Variable Distribution Law Based on Computational Experiments. *System Analysis & Mathematical Modeling*, 2023, vol. 5, no. 3, pp. 350–366. (In Russian). EDN: WDEIME. DOI: 10.17150/2713-1734.2023.5(3).350-366.