

Научная статья

УДК 303.732.4

EDN MYVXJT

DOI 10.17150/2713-1734.2023.5(3).251-265



**Е.А. Митюшов**

*Уральский федеральный университет имени первого Президента  
России Б.Н. Ельцина, г. Екатеринбург, Российская Федерация*

**Н.Е. Мисюра**

*Уральский федеральный университет имени первого Президента  
России Б.Н. Ельцина, г. Екатеринбург, Российская Федерация*

**Е.Ю. Раскатов**

*Уральский федеральный университет имени первого Президента  
России Б.Н. Ельцина, г. Екатеринбург, Российская Федерация*

## **Имитационная модель двухмассового машинного агрегата с карданной передачей**

**Аннотация.** Работа посвящена разработке математической модели, описывающей динамику двухмассового машинного агрегата с карданной передачей с учетом каталожных данных асинхронного электродвигателя. Получена эталонная имитационная модель машинного агрегата последовательной структуры, приводящегося в движение асинхронным двигателем. Моделируемый машинный агрегат состоит из редуктора и двух вращающихся масс, между которыми расположена карданная передача с заданной жесткостью на кручение. Получены дифференциальные уравнения движения машинного агрегата. Разработано математическое описание механической характеристики на основе скорректированной формулы Клосса и выполнено исследование влияния параметров машинного агрегата на его работу в пусковом, установившемся и аварийном режимах. Выполнен анализ возникающих колебаний и динамических нагрузок и представлены результаты численной интерпретации полученных результатов в графическом виде.

**Ключевые слова.** Механическая характеристика, коррекция формулы Клосса, дифференциальное уравнение движения машинного агрегата.

**Информация о статье.** Дата поступления: 28 апреля 2023 г.; дата принятия к публикации: 19 июня 2023 г.; дата онлайн-размещения: 28 сентября 2023 г.

Original article

**Е.А. Mityushov**

*Ural Federal University named after the First President  
of Russia B.N. Yeltsin, Ekaterinburg, Russian Federation*

**N.E. Misyura**

*Ural Federal University named after the First President  
of Russia B.N. Yeltsin, Ekaterinburg, Russian Federation*

**E.Yu. Raskatov**

*Ural Federal University named after the First President  
of Russia B.N. Yeltsin, Ekaterinburg, Russian Federation*

## **Imitation Model of a Dual-Mass Machine with Universal Joint Shaft Transmission**

**Abstract.** The research is devoted to developing a mathematical model describing the dynamics of a dual-mass machine unit with a cardan gear, taking into account the

catalogue data of an induction motor. A reference simulation model of a machine unit of sequential structure driven by a given induction motor is obtained. The simulated machine unit consists of a reducer and two rotating masses with a cardan gear with a given torsional stiffness between them. The differential equations of motion of the machine unit were calculated. A mathematical description of mechanical characteristics on the basis of Klos formulae has been developed and the influence of machine unit parameters on its performance in start-up, steady-state and emergency modes of operation has been studied. The analysis of arising oscillations and dynamic loads is carried out and the results of numerical implementation of the obtained results are presented.

**Keywords.** Mechanical characteristic, Closs formula correction, differential equation of motion of the machine unit.

**Article info.** Received 28 April, 2023; Accepted 19 June, 2023; Available online 28 September, 2023.

## Введение

Карданные передачи находят широкое применение в качестве трансмиссий в автомобилестроении, сельскохозяйственном и транспортном машиностроении, а также в металлургическом производстве. Их исследованию посвящено достаточно большое количество работ [1–11]. При высоком уровне моделирования работы механизмов с участием карданных передач во всех этих работах присутствует серьезный недостаток. В них либо исключается из рассмотрения двигатель, приводящий механизм в движение, и его действие заменяется постоянным крутящим моментом, либо работа двигателя учитывается линейной зависимостью крутящего момента от угловой скорости ротора. Это не позволяет корректно рассматривать поведение машинного агрегата при переходных, установившихся и аварийных режимах работы, в полной мере исследовать влияние параметров рабочей машины на ее эксплуатационные характеристики, а также выполнять обоснованный выбор электродвигателя по величине технологической нагрузки. Недостаток существующих подходов может быть преодолен путем включения в имитационную математическую модель машинного агрегата каталожных данных электродвигателя, интегрированным образом представленных в его естественной механической характеристике. При этом механическая характеристика должна быть представлена в удобном аналитическом виде.

Целью работы является построение имитационной модели машинного агрегата последовательной структуры с двумя вращающимися массами, между которыми находится карданная передача с упругим промежуточным валом. Машинный агрегат включает в себя асинхронный двигатель.

## 1. Постановка задачи

Для построения имитационной модели машинного агрегата с карданной передачей выберем следующую структурную схему (рис.1)

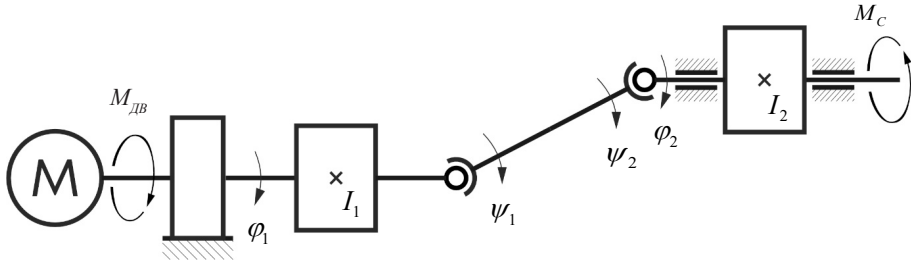


Рис. 1. Структурная схема машинного агрегата

Здесь  $I_1$  — приведенный к выходному валу редуктора момент инерции вращающихся масс ротора электродвигателя и редуктора,  $I_2$  — моменты инерции вращающихся масс рабочей машины,  $\varphi_i$  — углы поворота валов 1 и 2,  $\psi_i$  — углы поворота левого и правого сечений промежуточного вала,  $M_c$  — постоянный момент сопротивления,  $M_{об}(\omega_0)$  — момент двигателя,  $c$  — жесткость при кручении промежуточного вала,  $\omega_0$  — угловая скорость ротора электродвигателя.

Ставится задача: составить дифференциальные уравнения движения системы, получить имитационную модель и выполнить исследование пусковых и установившихся режимов работы машинного агрегата, а также выполнить анализ возникающих при этом автоколебаний. Следуя работам [6–8; 10] при создании имитационной модели пренебрегается массой промежуточного вала.

## 2. Кинематический анализ

В качестве обобщенных координат выберем углы поворота входного и выходного валов  $\varphi_1$  и  $\varphi_2$ .

С учетом известных соотношений [12; 13], связывающих угловые скорости ведущего и ведомого валов универсального шарнира, имеем:

$$\frac{d\psi_i}{d\varphi_i} = \frac{\cos \alpha}{1 - \sin^2 \alpha \cos^2 \varphi_i}, \quad i=1,2,$$

где  $\alpha$  — угол между осями валов в карданной передаче.

Откуда:

$$\psi_i = \int_0^{\varphi_i} \frac{\cos \alpha}{1 - \sin^2 \alpha \cos^2 \varphi_i} d\varphi.$$

С учетом, так называемой, усеченной формулы [1; 7]

$$\psi_i = \varphi_i + \lambda \sin 2\varphi_i, \quad \lambda = \operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2} \quad (1)$$

При угле между осями валов в  $15^\circ$  отклонение от точного решения в вычислении угла поворота ведомой вилки универсального шарнира с использованием приближенной формулы показано на графике (рис. 2).

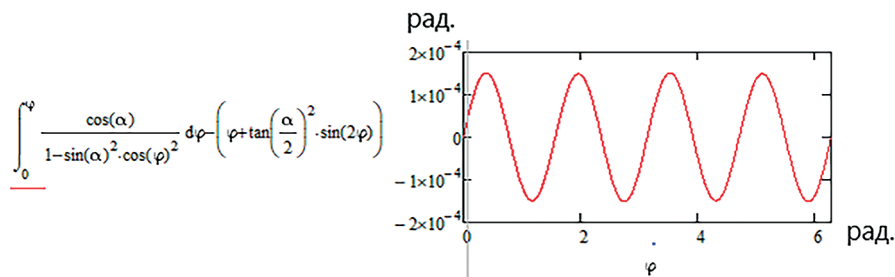


Рис. 2. График ошибок при использовании усеченной формулы

Максимальное отклонение от точного значения составляет  $8,6 \cdot 10^{-3}$  град.

### 3. Вывод уравнений динамической системы

Для получения дифференциальных уравнений движения рассматриваемой динамической системы воспользуемся уравнениями Лагранжа

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}_1} - \frac{\partial T}{\partial \varphi_1} &= M_{np.ов}(\dot{\varphi}_1) - \frac{\partial \Pi}{\partial \varphi_1}, \\ \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}_2} - \frac{\partial T}{\partial \varphi_2} &= -M_c - \frac{\partial \Pi}{\partial \varphi_2}. \end{aligned}$$

Здесь  $M_{np.ов}(\dot{\varphi}_1)$  — приведенный к первому валу момент двигателя, который определяется естественной механической характеристикой двигателя,  $T$  — кинетическая энергия,  $\Pi$  — потенциальная энергия.

Для рассматриваемого машинного агрегата

$$T = \frac{I_1 \dot{\varphi}_1^2}{2} + \frac{I_2 \dot{\varphi}_2^2}{2}, \quad \Pi = \frac{c(\psi_1 - \psi_2)^2}{2}.$$

Подстановка кинетической и потенциальной в уравнения Лагранжа с учетом соотношений (1) приводит к следующей системе дифференциальных уравнений, описывающих поведение машинного агрегата:

$$\begin{aligned} I_1 \ddot{\varphi}_1 &= M_{np.ов}(\dot{\varphi}_1) - c(\varphi_1 - \varphi_2 + \lambda(\sin 2\varphi_1 - \sin 2\varphi_2))(1 + 2\lambda \cos 2\varphi_2), \\ I_1 \ddot{\varphi}_2 &= -M_c + c(\varphi_1 - \varphi_2 + \lambda(\sin 2\varphi_1 - \sin 2\varphi_2))(1 + 2\lambda \cos 2\varphi_2). \end{aligned}$$

После тождественных преобразований и пренебрежением членами, содержащими  $\lambda$  в степени выше первой, приходим к уравнениям работы [7]

$$\begin{aligned} I_1 \ddot{\varphi}_1 &= M_{np.об}(\dot{\varphi}_1) - c[\varphi_1 - \varphi_2 + 2\lambda((\varphi_1 - \varphi_2)\cos 2\varphi_2) + \sin(\varphi_1 - \varphi_2)\cos(\varphi_1 + \varphi_2)], \\ I_1 \ddot{\varphi}_2 &= -M_C + c[\varphi_1 - \varphi_2 + 2\lambda((\varphi_1 - \varphi_2)\cos 2\varphi_2) + \sin(\varphi_1 - \varphi_2)\cos(\varphi_1 + \varphi_2)]. \end{aligned}$$

#### 4. Построение механической характеристики

Большинство машин промышленных производств приводятся в движение асинхронными двигателями. Трехфазный асинхронный электродвигатель наиболее широко используется в современной промышленности и обеспечивает требуемую мощность для широкого ассортимента машин. Данный двигатель — переменного тока, частота вращения ротора которого не равна (в двигательном режиме меньше) частоте вращения магнитного поля, создаваемого током обмотки статора. Относительная разница угловых скоростей (частот) поля статора и ротора называется скольжением (обозначается буквой  $s$ ) и определяется равенством:

$$s = \frac{\omega_l - \omega_0}{\omega_l},$$

где  $\omega_l = \frac{2\pi f}{p}$  — угловая скорость поля статора (синхронная угловая скорость),  $f$  — частота тока,  $p$  — количество пар полюсов электродвигателя.

При исследовании работы машинных агрегатов, приводящихся в движение асинхронными двигателями, для установления связи крутящего момента с величиной скольжения используется формула Клосса [14; 15]:

$$M_D = \frac{2M_{кр}}{\frac{s}{s_{кр}} + \frac{s_{кр}}{s}}, \quad (2)$$

здесь  $M_{кр}$  — максимальный (критический) момент, создаваемый двигателем,  $s_{кр}$  — критическое скольжение, отвечающее максимальному моменту.

При работе двигателя на участке механической характеристики, соответствующем значениям больше критического  $s \geq s_{кр}$ , формула Клосса дает большую ошибку. Этот диапазон изменения скольжения характерен для переходных процессов и его учет в модели машинного агрегата чрезвычайно важен для полного анализа режимов ее работы. Формула (2) широко используется для иссле-

дования работы асинхронного двигателя в установившихся режимах, но применять её для исследования переходных процессов не корректно.

При построении моделей машинных агрегатов механическую характеристику двигателя было предложено получать в виде скорректированной формулы Клосса [16]

$$M_{\text{д}}(\omega_0) = \frac{2M_{\text{кр}}}{s = \frac{\omega_l - \omega_0}{\omega_l} + \frac{s_{\text{кр}}}{s = \frac{\omega_l - \omega_0}{\omega_l}}} H(\omega_0 - \omega_{\text{кр}}) + \sum_{n=0}^3 b_n \omega_0^n H(\omega_0 - \omega_{\text{кр}}), \quad (3)$$

$$\omega_{\text{кр}} = \frac{\pi n_1}{30} (1 - s_{\text{кр}}),$$

$$H(\omega) = \begin{cases} 1 & \text{при } \omega \geq 0, \\ 0 & \text{при } \omega < 0. \end{cases} \text{ — функция Хевисайда.}$$

Коэффициенты полинома  $f(\omega_0) = \sum_{n=0}^3 b_n \omega_0^n$  определяются из следующих граничных условий:

$$f(0) = M_{\text{п}}, \quad (\omega_{\text{кр}}) = M_{\text{кр}}, \quad \left. \frac{df}{d\omega_0} \right|_{\omega_0=0} = \left. \frac{df}{d\omega_0} \right|_{\omega_0=\omega_{\text{кр}}} = 0.$$

Граничные условия позволяют получить систему уравнений для определения коэффициентов полинома

$$\begin{cases} b_0 + b_1 \cdot 0 + b_2 \cdot 0 + b_3 \cdot 0 = M_{\text{п}} \\ b_1 + 2b_2 \cdot 0 + 3b_3 \cdot 0 = 0 \\ b_0 + b_1 \cdot \omega_{\text{кр}} + b_2 \cdot \omega_{\text{кр}}^2 + b_3 \cdot \omega_{\text{кр}}^3 = M_{\text{кр}} \\ b_1 + 2b_2 \cdot \omega_{\text{кр}} + 3b_3 \cdot \omega_{\text{кр}}^2 = 0 \end{cases}.$$

Коэффициенты полинома определяются равенствами:

$$b_0 = M_{\text{п}}, \quad b_1 = 0, \quad b_2 = \frac{3(M_{\text{кр}} - M_{\text{п}})}{\omega_{\text{кр}}^2}, \quad b_3 = -\frac{2(M_{\text{кр}} - M_{\text{п}})}{\omega_{\text{кр}}^3}.$$

Преимуществом предлагаемого метода коррекции механической характеристики является аналитическое представление, что позволяет использовать его в различных моделях машинных агрегатов.

Для построения механической характеристики конкретного асинхронного двигателя необходимо из его каталожных характеристик выбрать, номинальную мощность  $P$ , номинальную частоту

ту  $n_H$ , значения кратности максимального момента  $k_M = M_{кр} / M_H$  и кратности пускового момента  $k_{II} = M_{II} / M_H$ . Далее в системе СИ определяются номинальный и максимальный крутящий моменты:

$$M_H = \frac{30P}{\pi n_H}, M_{кр} = k_M M_H. \quad (4)$$

Для определения критического скольжения предварительно находится номинальное скольжение:

$$M_H = \frac{30P}{\pi n_H}, M_{кр} = k_M M_H. \quad (5)$$

$$s_H = \frac{n_I - n_H}{n_I}, n_I = \frac{30\omega_I}{\pi} = \frac{60f}{p}, \quad (6)$$

Критическое скольжение, с учетом хорошего предсказания формулы Клосса (2) на участке  $s \leq s_{кр}$ , определяется через номинальное скольжение. Для этого в формулу (2) подставляются номинальные значения  $s_H$  и  $M_H$ . Тогда  $M_H = \frac{2M_{кр}}{\frac{s_H}{s_{кр}} + \frac{s_{кр}}{s_H}}$ . Откуда находится формула для определения критического скольжения [17]:

$$s_{кр} = s_H (k_M + \sqrt{k_M^2 - 1}), \quad (7)$$

В качестве примера выполним процедуры выбора электродвигателя и построение его механической характеристики для машинного агрегата, представленного на рис. 1, со следующими характеристиками:

$$I_1 = 1 \text{ кг} \cdot \text{м}^2, I_2 = 1 \text{ кг} \cdot \text{м}^2, M_C = 450 \text{ Н} \cdot \text{м}, \\ c_{12} = 2 \cdot 10^4 \frac{\text{Н} \cdot \text{м}}{\text{рад}}, \alpha = 15^\circ, \omega_2 = 10 \frac{\text{рад}}{\text{с}}, \eta = 0,95.$$

Мощность двигателя для машинного агрегата с указанными характеристиками определяется из уравнения баланса энергии при работе агрегата в установившемся режиме:

$$P = \frac{M_C \omega_2}{1000\eta} = 5 \text{ кВт}.$$

Выбираем двигатель АИР132М8 с каталожными данными<sup>1</sup>:

<sup>1</sup> Каталог двигателей. URL: [https://samelectric.ru/wp-content/uploads/downloads/2019/12/setz-air-katalog-220-380-www.samelectric.ru\\_.pdf](https://samelectric.ru/wp-content/uploads/downloads/2019/12/setz-air-katalog-220-380-www.samelectric.ru_.pdf).

$$P = 5,5 \text{ кВт}, n = 750(720) \frac{\text{об}}{\text{мин}}, k_{\Pi} = \frac{M_{\Pi}}{M_H} = 1,9, k_M = \frac{M_{кр}}{M_H} = 2,0.$$

По характеристикам двигателя находим синхронную и номинальную частоту вращения  $n_I = 750 \frac{\text{об}}{\text{мин}}, n_H = 720 \frac{\text{об}}{\text{мин}}$ .

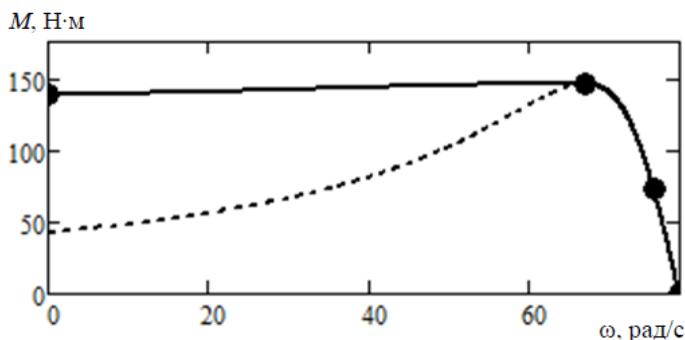
Определяем количество пар полюсов подключения по частоте тока и синхронной угловой скорости  $p = \frac{2\pi f}{\omega_I} = \frac{2\pi f}{\frac{\pi n_I}{30}} = \frac{60f}{n_I} = \frac{60 \cdot 50}{750} = 4$ .

По формулам (4) – (7) определяем номинальный, пусковой и максимальные моменты, а также критическое скольжение:

$$M_H = \frac{P}{\omega_H} = \frac{30P}{\pi n_H} = 72,9 \text{ Н} \cdot \text{м}, M_{\Pi} = k_{\Pi} M_H = 1,9 \cdot 72,9 = 139 \text{ Н} \cdot \text{м},$$

$$M_{кр} = k_M M_H = 2,0 \cdot 72,9 = 146 \text{ Н} \cdot \text{м}, s_{кр} = \frac{n_I - n_H}{n_I} (k_M + \sqrt{k_M^2 - 1}) = 0,149.$$

С использованием формулы Клосса (2) и скорректированной формулы (3) выполнено построение механической характеристики двигателя АИР132М8 в координатах  $\omega, M_{\text{дв}}$  (рис. 3). Там же для подтверждения достоверности предлагаемой коррекции приведены значения момента двигателя, найденные из каталожных значений



**Рис. 3. Механическая характеристика двигателя АИР132М8 в координатах  $\omega, M_{\text{дв}}$ . По формуле Клосса - пунктирная линия, по полиномиальной коррекции - сплошная линия, по каталожным данным – точки**

#### 4. Имитационная динамическая модель машинного агрегата с карданной передачей

Имитационная модель двухмассового машинного агрегата представлена программой в пакете компьютерной алгебры



Mathcad. Предварительно находится приведенный к выходному валу редуктора момент двигателя с использованием соотношения:

$$M_{np.ov}(\omega_1) = u M_d(\omega_0(\omega_1)), \omega_0(\omega_1) = u \omega_1,$$

где  $u$  — передаточное отношение,  $\omega_0$  — угловая скорость ротора электродвигателя.

С учетом значений номинальной угловой скорости ротора двигателя и угловой скорости выходного вала 2, находим:

$$u = \frac{\omega_H}{\omega_2} = 7,5.$$

### Листинг программы:

Параметры модели

$$I1 := 1 \quad I2 := 1 \quad c12 := 2 \cdot 10^4 \quad Mc := 450 \quad \alpha := \frac{\pi}{180} \cdot 15 \quad \lambda := 0.017$$

Вектор правых частей дифференциальных уравнений в форме Коши

$$D(t, Y) := \begin{bmatrix} Y_2 \\ Y_3 \\ \frac{1}{I1} \cdot [Mnpd(Y_2) - c12 \cdot [Y_0 - Y_1 + \lambda \cdot (\sin(2 \cdot Y_0) - \sin(2 \cdot Y_1)) \cdot (1 + 2 \lambda \cdot \cos(2 \cdot Y_0))]] \\ \frac{1}{I2} \cdot [-Mc + c12 \cdot [Y_0 - Y_1 + \lambda \cdot (\sin(2 \cdot Y_0) - \sin(2 \cdot Y_1)) \cdot (1 + 2 \lambda \cdot \cos(2 \cdot Y_1))]] \end{bmatrix}$$

$t0 := 0$        $t1 := 1$       интервал поиска решения

$$y0 := \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{начальные условия}$$

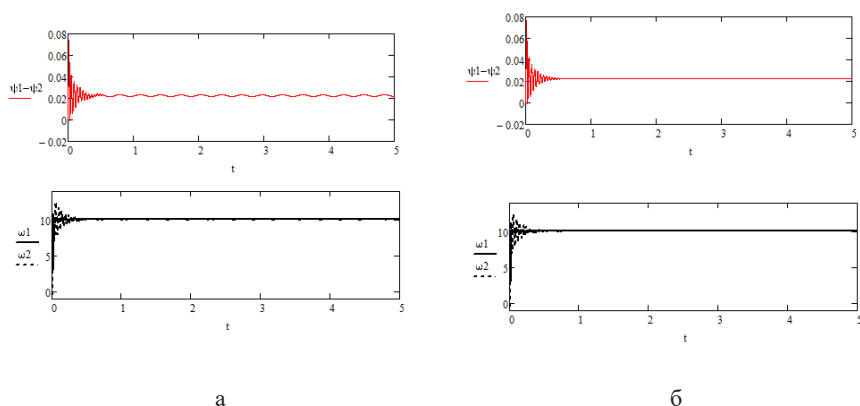
$N := 100000$       количество точек для решения

$F := \text{Adams}(y0, t0, t1, N, D)$       выбор решателя

$$t := F^{(0)} \quad \varphi1 := F^{(1)} \quad \varphi2 := F^{(2)} \quad \omega1 := F^{(3)} \quad \omega2 := F^{(4)}$$

$$\psi1 := \varphi1 + \lambda \cdot \sin(2 \cdot \varphi1) \quad \psi2 := \varphi2 + \lambda \cdot \sin(2 \cdot \varphi2)$$

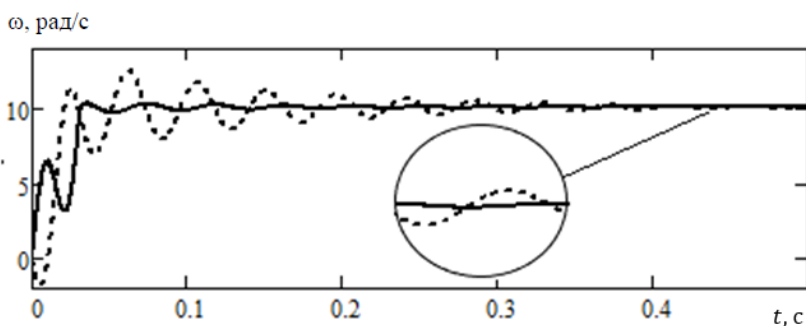
Сравнение результатов расчета по двум динамическим моделям, линейной по параметру  $\lambda$  и нелинейной, показывает существенное различие поведения системы в установившемся режим (рис. 4).



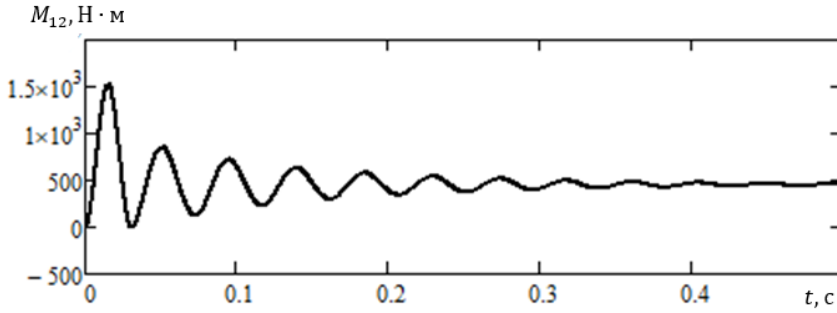
**Рис. 4. Угол закручивания промежуточного вала и угловые скорости валов 1 и 2 в линейной модели – (а), угол закручивания промежуточного вала и угловые скорости валов 1 и 2 в нелинейной модели – (б)**

Как видно из графиков использование линейного приближения по параметру  $\lambda$  приводит к неудовлетворительным предсказаниям работы машинного агрегата в неустойчивом режиме.

Имитационная модель позволяет исследовать влияние параметров машинного агрегата на его работу в пусковом и установившемся режимах. В частности при заданных параметрах получен закон изменения угловых скоростей первого и второго вала (рис. 5), а также закон изменения крутящего момента в промежуточном вале карданной передачи (рис. 6).



**Рис. 5. Графики изменения угловых скоростей первого (сплошная линия) и второго (пунктирная линия) вала**



*Рис. 6. График изменения крутящего момента на валу карданной передачи*

Из приведенных графиков видно, что установившийся режим работы машинного агрегата начинается через 0,4 с после включения электродвигателя. Пусковой режим сопровождается колебаниями с большими амплитудами изменения угловой скорости и крутящего момента, которые быстро уменьшаются. Неравномерность хода в установившемся режиме составляет 1,6 %. Крутящий момент на валу карданной передачи в пусковом режиме 3,5 раза превосходит его среднее значение при установившемся режиме, которое изменяется в интервале от  $388 \text{ Н} \cdot \text{м}$  до  $513 \text{ Н} \cdot \text{м}$ .

Имитационная модель машинного агрегата позволяет оценить нагрузочную способность его электродвигателя. В рассмотренном примере двигатель выбирался с запасом по мощности и под номинальную статическую нагрузку на втором валу величиной  $M_c = 450 \text{ Н} \cdot \text{м}$ . Рассмотрим ступенчатый закон изменения статического момента от времени

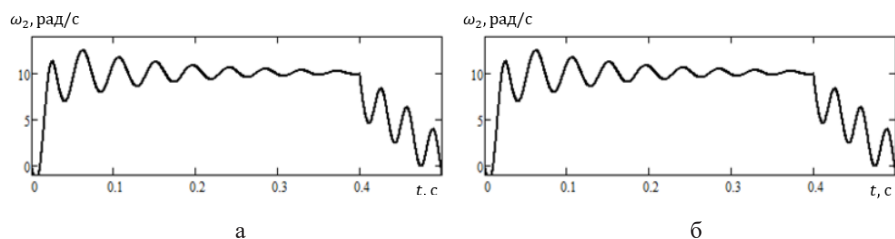
$$M_c(t) = M_c H(T - t) + k M_c H(t - T),$$

где  $k$  — коэффициент превышения номинальной нагрузки,  $T$  — время до изменения нагрузки при работе машинного агрегата,  $H(t)$  — функция Хевисайда

$$H(t) = \begin{cases} 1 & \text{при } t \geq 0, \\ 0 & \text{при } t < 0. \end{cases}$$

На рис. 7 приведены графики изменения угловой скорости второго вала при различных коэффициентах перегрузки.

При перегрузке с коэффициентом  $k = 1,5$  машинный агрегат продолжает работать в номинальном режиме, а при  $k = 2,7$  переходит в аварийный режим, угловая скорость снижается с большими амплитудами колебаний и в момент времени 0,5 с происходит остановка машинного агрегата.



**Рис. 7. Графики изменения угловой скорости второго вала при различных коэффициентах перегрузки: а) –  $k = 1,5$ , б) –  $k = 2,7$ ;  $T = 0,4$  с**

### Заключение

Создана имитационная модель машинного агрегата, несущего две вращающиеся массы, между которыми расположена карданная передача с упругим валом. Динамическая модель представлена аналитически системой двух дифференциальных уравнений второго порядка, включающей механическую характеристику электродвигателя. Используется оригинальная форма записи механической характеристики, позволяющая исследовать работу машинного агрегата в пусковых, установившихся и аварийных режимах. На основе найденного алгоритма получена имитационная модель машинного агрегата в пакете компьютерной алгебры Mathcad. Компьютерные эксперименты с имитационной моделью демонстрируют значительные колебания кинематических и силовых параметров динамической системы в период разгона при прямом включении электродвигателя. С целью уменьшения нежелательных колебаний планируется создание динамической модели машинного агрегата с преобразователем частоты для обеспечения режима его плавного пуска.

### Список использованной литературы

1. Писарев А.М. Усукваши трептения в карданни валове / А.М. Писарев, Б.И. Чешанков, С.Н. Бъчваров // Годишник на ВТУЗ по Приложна механика. — 1968. — Т. 4, № 1. — С. 13–22.
2. Лапшин С.А. Основные направления повышения долговечности карданных передач тракторов : автореф. дис. ... д-ра техн. наук : 05.05.03 / С.А. Лапшин. — Москва, 1976. — 33 с.
3. Кожевников С.Н. Карданные передачи / С.Н. Кожевников. — Киев : Техніка, 1978. — 268 с.
4. Щербинин Ю.П. Снижение уровня крутильных колебаний валопроводов силовых трансмиссий универсальных тягово-энергетических модулей : дис. ... канд. техн. наук : 05.22.07 / Ю.П. Щербинин. — Москва, 2004. — 184 с.
5. Кручек Д.Н. Кинематика карданных передач локомотивов / Д.Н. Кручек, В.В. Курилкин // Известия Петербургского университета путей сообщения. — 2006. — № 3. — С. 37–44.

6. Грудинин В.Г. Исследование влияния дополнительных связей в колебательных механических системах вращательного типа / В.Г. Грудинин. — EDN NDJWWP // Вестник Иркутского государственного технического университета. — 2011. — № 2. — С. 34–40.
7. Златанов В.Д. Стационарные колебания в двухмассовом машинном агрегате с карданной передачей / Златанов В.Д. — DOI 10.1007/978-3-319-29579-4\_11 // Современное машиностроение: наука и образование : материалы 4-й Международ. науч.-практ. конф., Санкт-Петербург, 19 июня 2014 г. — Санкт-Петербург, 2014. — С. 192–202.
8. Мальцев А.А. Исследование в среде MathCAD крутильных колебаний электропривода стана ДУО-160 / А.А. Мальцев, В.А. Соболев, И.В. Кожевников. — EDN TEUDIZ // Инженерный вестник. — 2014. — № 9. — С. 96–102.
9. Avrigean E. Static and Dynamic Comparative Study on the Cardanic Transmission / E. Avrigean // Applied Mechanics and Materials. — 2015. — Vol. 7242. — P. 126–130.
10. Кукушкин Е.В. Уравнения движения карданного шарнира / Е.В. Кукушкин. — DOI 10.15593/2224-9877/2021.2.10. — EDN VAIETS // Вестник ПНИПУ Машиностроение, материаловедение. — 2021. — Т. 23, № 2. — С. 79–86.
11. Мальцев А.А. Построение крутильно-колебательной модели электропривода рабочих валков прокатного стана на основании уравнений Лагранжа 2 род / А.А. Мальцев. — EDN QDDDUW // Оригинальные исследования. — 2022. — Т. 12, № 1. — С. 130–145.
12. Артоболевский И.И. Теория механизмов и машин / И.И. Артоболевский. — Москва : Наука, 1988. — 638 с.
13. Теория механизмов и машин: учебник / К.В. Фролов, С.А. Попов, А.К. Мусатов и др.; под ред. К.В. Фролова. — Москва : МГТУ им. Баумана — 2002. — 496 с.
14. Kloss M. Starting Torque of Three-phase Motors the Electron / M. Kloss. — 1908. — Vol. 2, p. 18
15. Ключев В.И. Теория электропривода: учебник / В.И. Ключев. — Москва : Энергоатомиздат, 1985. — 560 с.
16. Мисюра Н.Е. Моделирование механической характеристики асинхронного двигателя / Мисюра Н.Е., Митюшов Е.А. — DOI 10.17213/0136-3360-2022-4-38-43. — EDN JIZVYJ // Известия высших учебных заведений. Электромеханика. — 2022. — Т. 65, № 4. — С. 38–43.
17. Усольцев А.А. Электрический привод / А.А. Усольцев. — Санкт-Петербург : НИУ ИТМО, 2012. — 238 с.

## References

1. Pisarev A.M., Cheshankov B.I., B"chvarov S.N. Torsion Oscillations in Cardan Shafts. *Godishnik na VTUZ po Prilozhna mekhanika = Yearbook of the University of Applied Mechanics*, 1968, vol. 4, no. 1, pp. 13–22. (In Bulgarian).
2. Lapshin S.A. *The main directions to increase durability of cardan gears of tractors. Doct. Diss. Thesis*. Moscow, 1976. 33 p.
3. Kozhevnikov S.N. *Cardan gears*. Kiev, Tekhnika Publ., 1978. 268 p.
4. Shcherbinin Yu.P. *Reducing the level of torsional vibrations of shaft lines of power transmissions of universal traction and energy modules. Cand. Diss*. Moscow, 2004. 184 p.
5. Kruchek D.N., Kurilkin V.V. *Kinematics of cardan gears of locomotives. Izvestiya Peterburgskogo universiteta putei soobshcheniya = Proceedings of Petersburg transport university*, 2006, no. 3, pp. 37–44. (In Russian).

6. Grudin V.G. Study of the Effect of Additional Constraints in Rotating Type Vibratory Systems. *Vestnik Irkutskogo gosudarstvennogo tekhnicheskogo universiteta = Proceedings of Irkutsk State Technical University*, 2011, no. 2, pp. 34–40. (In Russian). EDN: NDJWWP.

7. Zlatanov V.D. Stationary vibrations in a two-mass machine unit with cardan transmission. Modern mechanical engineering: science and education. *Materials of the 4<sup>th</sup> International Scientific Conference, Saint Petersburg, Junio 19, 2014*. Saint Petersburg, 2014, pp. 192–202. (In Russian). DOI 10.1007/978-3-319-29579-4\_11.

8. Mal'tsev A.A., Sobolev V.A., Kozhevnikov I.V. Investigation in the Math-CAD environment of torsional vibrations of the electric drive of the DUO-160 mill. *Inzhenernyi vestnik = Engineering bulletin*, 2014, no. 9, pp. 96–102. (In Russian). EDN: TEUDIZ.

9. Avrigean E. Static and Dynamic Comparative Study on the Cardanic Transmission. *Applied Mechanics and Materials*, 2015, vol. 7242, pp. 126–130.

10. Kukushkin E.V. Equations of Motion of the Universal Joint. *Vestnik Permskogo natsional'nogo issledovatel'skogo politekhnicheskogo universiteta. = Bulletin of Perm national research polytechnic university. Mechanical engineering, materials science*, 2021, vol. 23, no. 2, pp. 79–86. (In Russian). EDN: VAIETS. DOI: 10.15593/2224-9877/2021.2.10.

11. Mal'tsev A.A. Construction of the Electric Drive Torsional-Oscillatory Model of the Rolling Mill Working Rolls Based on Lagrange Equations of the 2<sup>nd</sup> Kind. *Original'nye issledovaniya = Original research*, 2022, vol. 12, no. 1, pp. 130–145. (In Russian). EDN: QDDDUW.

12. Artobolevskii I.I. *Theory of mechanisms and machines*. Moscow, Nauka Publ., 1988. 638 p.

13. Frolov K.V., Popov S.A., Musatov A.K. [et al.]; Frolov K.V. (ed.) *Theory of mechanisms and machines*. Moscow, Moscow State University Publ., 2002. 496 p.

14. Kloss M. *Starting Torque of Three-phase Motors the Electron*. 1908, vol. 2. pp. 18.

15. Klyuchev V.I. *Electric drive theory*. Moscow, Energoatomizdat Publ., 1985. 560 p.

16. Misyura N.E., Mityushov E.A. Simulation of the Induction Motor Mechanical Characteristics. *Izvestiya vysshikh uchebnykh zavedenii. Elektromekhanika = Russian electromechanics*, 2022, vol. 65, no. 4, pp. 38–43. (In Russian). EDN: JIZVYJ. DOI: 10.17213/0136-3360-2022-4-38-43.

17. Usol'tsev A.A. *Electric drive*. Saint Petersburg, NIU ITMO Publ., 2012. 238 p.

### Информация об авторах

**Митюшов Евгений Александрович** — доктор физико-математических наук, профессор, профессор кафедры металлургических и роторных машин, Институт новых материалов и технологий, Уральский федеральный университет имени первого Президента России Б.Н. Ельцина, г. Екатеринбург, Российская Федерация, e-mail: mitushov@urfu.ru.

**Мисюра Наталья Евгеньевна** — кандидат физико-математических наук, доцент кафедры металлургических и роторных машин, Институт новых материалов и технологий, Уральский федеральный университет имени первого Президента России Б.Н. Ельцина, г. Екатеринбург, Российская Федерация, e-mail: n\_misura@mail.ru.

**Раскатов Евгений Юрьевич** — доктор технических наук, доцент, профессор кафедры металлургических и роторных машин, Институт новых ма-

териалов и технологий, Уральский федеральный университет имени первого Президента России Б.Н. Ельцина, г. Екатеринбург, Российская Федерация, e-mail: e.j.raskatov@urfu.ru.

### Information about the Authors

**Evgeny A. Mityushov** — D.Sc. in Physical and Mathematical Sciences, Professor, Professor of the Department of Metallurgical and Rotor Machinery, Institute of New Materials and Technologies, Ural Federal University named after the First President of Russia B.N. Yeltsin, Ekaterinburg, Russian Federation, e-mail: mitushov@urfu.ru.

**Natalya E. Misyura** — PhD in Physical and Mathematical Sciences, Associate Professor of the Department of Metallurgical and Rotor Machinery, Institute of New Materials and Technologies, Ural Federal University named after the First President of Russia B.N. Yeltsin, Ekaterinburg, Russian Federation, e-mail: n\_misura@mail.ru.

**Evgeniy Yu. Raskatov** — D.Sc. in Technical Sciences, Associate Professor, Professor of the Department of Metallurgical and Rotor Machinery, Institute of New Materials and Technologies, Ural Federal University named after the First President of Russia B.N. Yeltsin, Ekaterinburg, Russian Federation, e-mail: e.j.raskatov@urfu.ru.

### Вклад авторов

Все авторы сделали эквивалентный вклад в подготовку публикации. Авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.

### Contribution of the Authors

The authors contributed equally to this article. The authors declare no conflicts of interests.

### Для цитирования

Митюшов Е.А. Имитационная модель двухмассового машинного агрегата с карданной передачей / Е.А. Митюшов, Н.Е. Мисюра, Е.Ю. Раскатов. — DOI 10.17150/2713-1734.2023.5(3).251-265. — EDN MYVXJT // System Analysis & Mathematical Modeling. — 2023. — Т. 5, № 3. — С. 251–265.

### For Citation

Mityushov E.A., Misyura N.E., Raskatov E.Yu. Imitation Model of a Dual-Mass Machine with Universal Joint Shaft Transmission. *System Analysis & Mathematical Modeling*, 2023, vol. 5, no. 3, pp. 205–221. (In Russian). EDN: MYVXJT. DOI: 10.17150/2713-1734.2023.5(3).251-265.