

**А.В. Сорокин***Байкальский государственный университет,  
г. Иркутск, Российская Федерация*

## **Математическая модель процессов, протекающих в механической части испытательного стенда трансмиссий**

**Аннотация.** Работа посвящена созданию математической модели, отражающей специфику процессов, протекающих в кинематической части испытательного стенда механических трансмиссий. Задачей стенда является проверка работоспособности изделий перед крупно узловым сборкой механизмов. Процесс испытаний характеризуется передачей энергии через вращающийся вал трансмиссии с нагружением его по определенному закону, который определяется контролируемыми рабочими и аварийными режимами трансмиссии. Механическая часть стенда состоит из трех роторов электрических машин, соединенных между собой валом длиной до 7 метров, а также два редуктора. Наличие длинного вала ставит вопрос о присутствии в механической части стенда упругого звена с распределенными параметрами, которое может оказывать существенное влияние на динамику стенда.

В работе было проведено обоснование упрощения математической модели процессов, протекающих в механической части стенда. Для синтеза системы автоматического регулирования скорости испытательного стенда затруднительно использовать представление трансмиссии как звена с распределенными параметрами. Была проведена проверка возможности эквивалентного приведения кинематической системы стенда с распределенными параметрами к двухмассовой системе со сосредоточенными параметрами.

Полученные результаты натурного эксперимента показали правильность данного предположения.

**Ключевые слова.** Испытательный стенд, испытание трансмиссий, электропривод, система управления.

**Информация о статье.** Дата поступления: 27 февраля 2023 г.; дата принятия к публикации: 14 апреля 2023 г.; дата онлайн-размещения: 14 мая, 2023 г.

Original article

**A.V. Sorokin***Baikal State University,  
Irkutsk, Russian Federation*

## **Mathematical Model of the Processes Occurring in the Mechanical Part of the Transmission Test Bench**

**Abstract.** The work is devoted to the creation of a mathematical model that reflects the specifics of the processes occurring in the kinematic part of the test stand for mechanical transmissions. The task of the stand is to check the performance of products before the large-nodal assembly of mechanisms. The testing process is characterized by the transfer of energy through the rotating shaft of the transmission with its loading according to a certain law, which is determined by the controlled

operating and emergency modes of the transmission. The mechanical part of the stand consists of three rotors of electrical machines connected to each other by a shaft up to 7 meters long, as well as two gearboxes. The presence of a long shaft raises the question of the presence in the mechanical part of the stand of an elastic link with distributed parameters, which can have a significant impact on the dynamics of the stand.

In the work, a justification was made for simplifying the mathematical model of the processes occurring in the mechanical part of the stand. For the synthesis of the automatic speed control system of the test bench, it is difficult to use the representation of the transmission as a link with distributed parameters. A check was made of the possibility of equivalent reduction of the kinematic system of the stand with distributed parameters to a two-mass system with lumped parameters.

The results of the natural experiment showed the correctness of this assumption.

**Keywords.** Test stand, transmission testing, electric drive, control system.

**Article info.** Received 27 February, 2023; Accepted 14 April, 2023; Available online 14 May, 2023.

---

Работа посвящена созданию математической модели, отражающей специфику процессов, протекающих в кинематической части испытательного стенда механических трансмиссий (ИСМТ). Данная статья является продолжением работы над данной тематикой [1].

Задачей стенда является проверка работоспособности изделий перед крупно узловым сборкой механизмов. Процесс испытаний характеризуется передачей энергии через вращающийся вал трансмиссии с нагружением его по определенному закону, который должен с максимальной точностью воспроизводить нагрузки, возникающие в трансмиссиях при их эксплуатации в рабочих и аварийных режимах [1].

Создание быстродействующей и высокоточной системы управления испытательным стендом [2] невозможно без учета механических характеристик объекта испытаний. Недостаточно точное математическое описание объекта управления приводит к большим погрешностям при анализе и синтезе системы автоматического управления, а в неблагоприятном случае — к потере устойчивости электропривода ИСМТ, что приводит к срыву программы испытаний и даже выходу испытуемого изделия из строя.

Механическая часть стенда состоит из трех роторов электрических машин (двигателя постоянного тока — машины компенсации потерь; асинхронного двигателя и синхронного генератора включенных по принципу взаимной нагрузки) соединенных между собой валом длиной до 7 метров. В кинематическую схему стенда входят два редуктора: хвостовой и промежуточный, являющиеся составной частью испытуемой трансмиссии. Наличие длинного вала ставит вопрос о присутствии в механической

части стэнда упругого звена с распределенными параметрами, которое может оказывать существенное влияние на динамику стэнда.

Уравнение для крутильных колебаний вала с распределенными параметрами и сосредоточенной массой на конце (массой ротора синхронного генератора) имеет вид [3; 4]

$$\frac{\partial^2 Y(x, t)}{\partial t} = \frac{a^2 \partial^2 Y(x, t)}{\partial x}, \quad (1)$$

где  $a = \sqrt{\frac{GJ_p}{I_1}}$  — скорость распространения волны упругой деформации;  $G$  — модуль сдвига;  $J_p$  — полярный момент инерции поперечного сечения вала;  $I_1$  — момент инерции единицы длины вала;  $Y(x, t)$  — угол поворота сечения вала  $x$ .

Граничные условия для распределенного (РП) объекта такого рода запишутся в виде

$$\left. \frac{GJ_p \partial Y(x, t)}{\partial x} \right|_{x=0} = M_{pn}(0, t);$$

$$\left. \frac{GJ_p \partial Y(x, t)}{\partial x} \right|_{x=l} = \frac{-J_2 \partial^2 Y(x, t)}{\partial x^2}, \quad (2)$$

где  $M_{pn}(x, t)$  — закручивающий момент в сечении  $x$ ;  $J_2$  — момент инерции ротора синхронного генератора;  $l$  — длина вала.

Уравнение скорости вала с распределенными параметрами запишется в виде

$$\frac{\partial \omega_{pn}(x, t)}{\partial x} = -\frac{1}{ES} \cdot \frac{\partial M(x, t)}{\partial t}, \quad (3)$$

где  $\omega_{pn}(x, t)$  — скорость вращения РП объекта в сечении  $x$ ;  $ES$  — модуль упругости и площадь поперечного сечения РП звена.

Граничные условия определяются из

$$\left. \omega(x, 0) \right|_{x=l} = 0. \quad (4)$$

Применение непрерывного интегрального преобразования Лапласа к дифференциальным уравнениям в частных производных (1) и (3), которыми описывается распределенный объект управления, устраняет частные производные во времени  $t$  и в уравнениях остаются только частные производные по пространственной переменной  $x$ . Это означает, что описание объекта представляет собой обыкновенное дифференциальное уравнение. Граничные условия для исходного уравнения переходят в начальные условия для изображающего уравнения. Тогда система уравнений, описывающая динамику длинного вала с распределенными параметрами, запишется

$$\begin{cases} P\omega(0, p) = \frac{1}{J_1}(M_{\text{ex}} - M_{pn}(l, p)); \\ PM(x, p) = -\frac{ES}{a} - \frac{d\omega(x, p)}{dx}; \\ P\omega(x, p) = -\frac{1}{a\rho s} - \frac{dM(x, p)}{dx}, \end{cases} \quad (5)$$

где  $\omega(0, p)$  и  $J_1$  — скорость и момент инерции первой массы (роторов машины потерь и асинхронного двигателя);  $\rho$  — плотность материала трансмиссии.

Начальные условия для системы уравнений (5) выражаются в виде

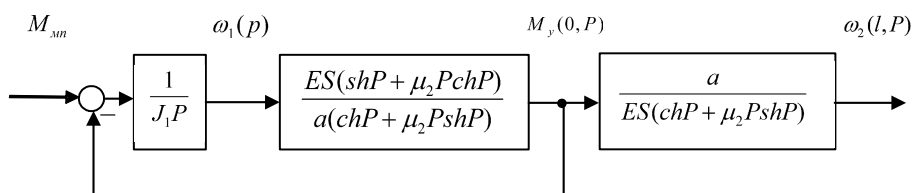
$$\begin{aligned} M(x, p) \Big|_{x=l} &= -J_2 M(l, p); \\ M(x, p) \Big|_{x=0} &= \mu_2 P^2 \beta \omega(x, p), \end{aligned} \quad (6)$$

где  $\mu_2 = J_2/J_{pn}$ ;  $J_{pn}$  — момент инерции трансмиссии.

На основании уравнений (5) и (6) и прямого метода преобразований, предложенного в работе [4], можно получить передаточные функции распределенного объекта от скорости вращения  $\omega(0, p)$  к закручивающему моменту  $M(1, p)$ , от закручивающего момента к скорости вращения любого сечения распределенного звена  $\omega(x, p)$  и скорости вращения второй массы  $\omega(1, p)$  в гиперболических функциях

$$\begin{cases} W_M(p) = \frac{\Delta M(1, p)}{\Delta \omega(0, p)} = \frac{ES(shP + \mu_2 PchP)}{a(chP + \mu_2 PshP)}, \\ W_x(p) = \frac{\Delta \omega(x, p)}{\Delta M(1, p)} = \frac{a(chPx + \mu_2 PshPx)}{ES(shPx + \mu_2 PchPx)}, \\ W_\omega(p) = \frac{\Delta \omega(1, p)}{\Delta M(1, p)} = \frac{a}{ES(shP + \mu_2 PchP)}. \end{cases} \quad (7)$$

Структурная схема механической части ИСМТ с учетом распределенных параметров вала трансмиссии, построенная на основании уравнений (7) представлена на рис. 1.



**Рис. 1. Структурная схема механической части ИСМТ с учетом распределенных параметров вала трансмиссии**

Для синтеза системы автоматического регулирования скорости испытательного стенда затруднительно использовать приведенное представление трансмиссии как звена с распределенными параметрами. Поэтому представляется целесообразным эквивалентное приведение РП звена к двухмассовой системе со сосредоточенными параметрами и дальнейшей проверкой этого допущения по условиям эквивалентности переходных процессов сравниваемых систем.

При анализе двухмассовой системы делают обычно следующие допущения [5]:

- силы и моменты, действующие в системе, приложены к сосредоточенным массам, которые не подвергаются деформациям;
- упругие звенья невесомы и характеризуются постоянной жесткостью связи, т.е. коэффициентом пропорциональности между моментом и деформацией;
- деформация упругих звеньев линейна и подчиняется закону Гука;
- волновым движением деформации можно пренебречь.

Воспользовавшись предложенной в [6; 7] передаточной функцией, описывающей поведение электромеханического объекта с РП звеном при подчиненном токовом контуре и разомкнутой обратной связью по скорости, запишем

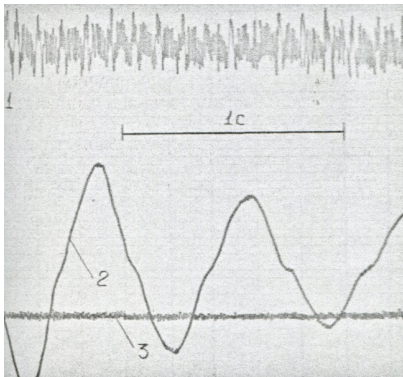
$$W(p)_{pn} = \frac{1}{chP + \mu_2 P shP}, \quad (8)$$

$$\text{где } \left. chP \right|_{P \rightarrow j\omega} = \cos \omega; \left. shP \right|_{P \rightarrow j\omega} = j \sin \omega.$$

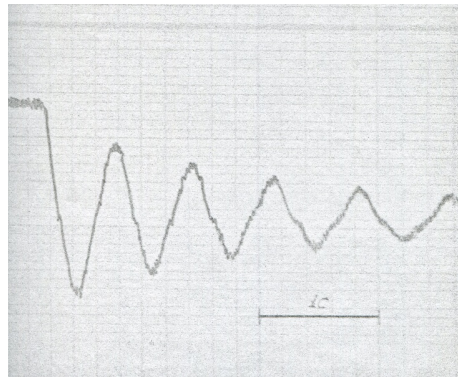
Первую резонансную частоту амплитудной частотной характеристики РП объекта  $\omega_{1pn}$  можно найти из выражения (8) как наименьший положительный корень трансцендентного уравнения

$$\left. W(p)_{pn}^{-1} \right|_{P \rightarrow j\omega} = \cos \omega_{1pn} - \mu_2 \omega_{1pn} \sin \omega_{1pn} = 0. \quad (9)$$

В результате решения (9) получаем низшую резонансную частоту РП объекта  $\omega_{1pn} = 9,05$  рад/с. Экспериментальная проверка этого расчета представлена на рис. 2, где показаны осциллограммы изменения момента, передаваемого трансмиссией, при сбросе момента с 5880 Нм до 0 посредством разрыва статорной цепи нагружающего устройства ИСМТ (рис. 2а). Также была проведена проверка при разрыве роторной цепи асинхронного двигателя нагружающего устройства (рис. 2б).



а



б

**Рис. 2. Изменение момента передаваемого трансмиссией ИСМТ**

На рис. 2. А. цифрами обозначены переменные состояния: 1 — скорость синхронного генератора (т.е. скорость испытуемой трансмиссии), 2 — момент, передаваемый трансмиссией (в стенде предусмотрен датчик момента), 3 — ток статора нагружающего устройства. Сравнение расчетной частоты низшего резонанса испы-

туемой трансмиссии с результатами, полученными в ходе эксперимента показывают, что модель РП объект является адекватной.

При приведении параметров РП вала трансмиссии рассмотрим случай приведения вала с равномерно распределенной массой и наличием на конце массивного диска (ротора синхронного генератора, входящего в состав нагружающего устройства). При организации системы управления по принципу подчиненного регулирования, с сильной обратной связью по скорости, можно принять, что конец вала закреплен. Для этого случая момент инерции вала, приведенный к свободному концу трансмиссии, запишется

$$J_{BO} = \frac{\int_0^l I_1 \theta^2 dx}{\theta_0^2}, \quad (10)$$

где  $\theta_0$  — угол закручивания, вызванный единичной парой, приложенной в точке приведения;  $\theta(x)$  — форма колебаний, т.е. закон изменения углов поворота сечений при наибольшем отклонении системы от равновесного состояния.

В точке приведения прикладывается крутящий момент с соответствующей формой колебаний  $\theta(x)$  определяемой из соотношения

$$\theta(x) = \theta_0 \frac{x}{l}. \quad (11)$$

Подставляя выражение (11) в (10) получаем

$$J_{BO} = \frac{1}{3} J_{pn}. \quad (12)$$

Так как для нашего случая на конце вала трансмиссии имеется масса (ротор синхронного генератора), то приведенный к свободному концу момент инерции трансмиссии равен

$$J_2 = J_{CG} + \frac{1}{3} J_{pn}, \quad (13)$$

где  $J_{CG}$  — момент инерции ротора синхронного генератора.

Собственную частоту колебаний второй массы при неподвижной первой можно получить из выражения

$$\omega_{СП} \approx \sqrt{\frac{C_M}{J_2}}, \quad (14)$$

где  $C_M$  — жесткость трансмиссии.

Механическая конструкция трансмиссии такова, что ее жесткость определяется соотношением

$$\frac{1}{C_M} = \frac{1}{C_{CB1}} + \frac{1}{C_{P1}} + \frac{1}{C_{B2}} + \frac{1}{C_{P2}} + \frac{1}{C_{M\Phi}}, \quad (15)$$

где  $C_{B1}$ ,  $C_{P1}$ ,  $C_{B2}$ ,  $C_{P1}$ ,  $C_{M\Phi}$  — жесткость участков вала, редукторов и срезной муфты трансмиссии.

Первое условие эквивалентности РП и СП (сосредоточенные параметры) систем имеет вид

$$\omega_{1pn} = \omega_{СП} \quad (16)$$

т.е. низшая собственная частота колебаний распределенного объекта должна быть равна собственной частоте колебаний объекта с сосредоточенными массами. Для данного случая при  $\mu_2 = 293$  можно считать, что резонансные частоты полностью совпадают.

Второе условие эквивалентности РП системы и двухмассовой системы с сосредоточенными параметрами имеет вид

$$\xi = \varepsilon \sqrt{\mu_2 + 0,5}, \quad (17)$$

где  $\xi$  — коэффициент демпфирования СП — систем;  $\varepsilon$  — коэффициент затухания РП — систем.

Величина  $\varepsilon$  определяется из осциллограмм (рис. 2), отражающих процесс затухания упругих колебаний в реальной трансмиссии при учете демпфирующих свойств машины потерь.

Коэффициент демпфирования механической части ИСМТ определяется [8]

$$\xi^M = 0.5 \left[ \frac{J_2^2 d_1 + J_1^2 d_2}{(J_1 + J_2)^{3/2} \sqrt{C_M J_1 J_2}} + b \sqrt{\frac{J_1 + J_2}{C_M J_1 J_2}} \right], \quad (18)$$

где  $b$  — коэффициент внутреннего трения в материале трансмиссии;  $d_1$  и  $d_2$  — коэффициенты механического трения в осях первой и второй массы.

Упругие колебания, возникающие в стенде, вызываются как изменением момента нагрузки, передаваемого через трансмиссию, так и изменением задания по скорости. Коэффициент демпфирования с учетом электромагнитной связи записывается в виде

$$\xi^{ЭМ} = 0,5 \frac{1}{(J_1 + J_2) C_M J_1 J_2} \left[ J_2^2 d_1 + J_2^2 d_2 + (J_1 + J_2)^2 b + J_2^2 \frac{K_M K_E}{R_{Я}} \right], \quad (19)$$

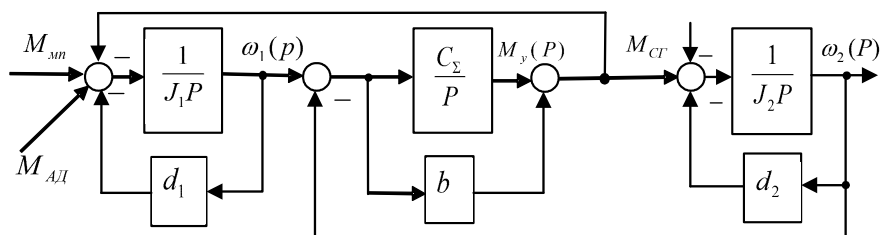
где  $K_M$ ,  $K_E$  — постоянные (при неизменном потоке намагничивания и пренебрежимо малой реакцией якоря машины потерь), определяемые конструктивными параметрами машины постоянного тока;  $R_{Я}$  — сопротивление якорной цепи машины потерь.



Решив уравнение (19) и подставив результат ( $\xi^{\text{ЭМ}} = 0,07$ ) в (17) получим выполнение второго условия эквивалентности преобразования РП объекта в СП.

Необходимо найти максимум второго и последующих резонансных пиков. Для этого строим амплитудную частотную характеристику ИСМТ [9]. Получены частоты резонансных пиков:  $\omega_{2РП} = 882\text{с}^{-1}$ ,  $\omega_{3РП} = 1756\text{с}^{-1}$ ,  $\omega_{4РП} = 2639\text{с}^{-1}$ . Все они находятся справа от частоты среза системы и влияние на динамику ИСМТ не оказывают. Таким образом выполняется третье условие эквивалентности РП системы и двухмассовой системы с сосредоточенными параметрами.

Структурная схема механической части ИСМТ, с учетом принятых допущений, приведенная к двухмассовому представлению [10] представлена на рис. 3.



**Рис. 3. Структурная схема механической части ИСМТ приведенная к двухмассовому представлению**

Этой структурной схеме соответствует следующая система уравнений, записанная в виде пространства состояний

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} \omega_2 \\ M_y \\ \omega_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{-b + d_2}{J_2} & \frac{1}{J_2} & \frac{b}{J_2} \\ -C_\Sigma & 0 & C_\Sigma \\ \frac{b}{J_1} & \frac{-1}{J_1} & \frac{-b + d_1}{J_1} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \omega_2 \\ M_y \\ \omega_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{-1}{J_2} & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{J_1} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} M_{сг} \\ M_{ад} + M_{мп} \end{bmatrix}, \quad (20)$$

где  $M_{мп}$  — момент создаваемый машиной компенсирующей потери в ИСМТ.

В работе было проведено обоснование упрощения математической модели процессов, протекающих в механической части ИСМТ. Наличие длинного вала трансмиссии ставило вопрос о присутствии в стенде упругого звена с распределенными параметрами, которое может оказывать существенное влияние на динамику стенда. Для синтеза системы автоматического регулирования скорости испытательного стенда затруднительно использовать приведенное представление трансмиссии как звена с распределенными

параметрами. Основываясь на рекомендациях данных Л.Н. Рассудовым [4], была проведена проверка возможности эквивалентного приведения кинематической системы стенда с распределенными параметрами к двухмассовой системе со сосредоточенными параметрами.

Полученные результаты натурного эксперимента (рис. 2) и исследование ИСМТ показали правильность данного предположения.

### Список использованной литературы

1. Сорокин А.В. Математическая модель нагружающего устройства испытательного стенда механических трансмиссий / А.В. Сорокин. — DOI 10.17150/2713-1734.2023.5(1).66-74. — EDN QDXVHM // System Analysis & Mathematical Modeling. — 2023. — Т. 5, № 1. — С. 66–74.
2. Патент № 1596305 А1 СССР, G05B 13/00. Устройство оптимизации электропривода стенда для испытаний трансмиссий : № 4375112 : заявл. 08.02.1988 : опубл. 30.09.1990 / Ю.А. Борцов, С.Е. Голик, Н.Д. Поляхов [и др.]. — 5 с.
3. Рассудов Л.Н. О динамике САР скорости следящего электропривода при наличии упругого звена с распределенными параметрами / Л.Н. Рассудов // Электричество. — 1981. — № 9. — С. 34–37.
4. Рассудов Л.Н. Электроприводы с распределенными параметрами механических элементов / Л.Н. Рассудов, В.Н. Мядзель. — Ленинград : Энергоатомиздат, 1987. — 144 с.
5. Пановко Я.Г. Основы прикладной теории упругих колебаний / Я.Г. Пановко. — Москва : Машгиз, 1957. — 335 с.
6. Киселев Н.В. Электроприводы с распределенными параметрами / Н.В. Киселев, В.Н. Мядзель, Л.Н. Рассудов. — Ленинград : Судостроение, 1985. — 220 с.
7. Белов М.П. Автоматизированный электропривод типовых производственных механизмов и технологических комплексов / М.П. Белов, В.А. Новиков, Л.Н. Рассудов. — Москва : Академия, 2007. — 576 с.
8. Борцов Ю.А. Электромеханические системы с адаптивным и модальным управлением / Ю.А. Борцов, Н.Д. Поляхов, В.В. Путов. — Ленинград : Энергоатомиздат, 1984. — 216 с.
9. Фурсов В.Б. Моделирование электропривода : учеб. пособие / В.Б. Фурсов. — 2 изд., испр. и доп. — Санкт-Петербург : Лань, 2019. — 220 с.
10. Борцов Ю.А. Автоматизированный электропривод с упругими связями / Ю.А. Борцов, Г.Г. Соколовский. — 2-е изд., перераб. и доп. — Санкт-Петербург : Энергоатомиздат, 1992. — 288 с.

### References

1. Sorokin A.V. Mathematical Model of the Loading Device of the Test Bench Mechanical Transmissions. *System Analysis & Mathematical Modeling*, 2023, vol. 5, no. 1, pp. 66–74. (In Russian). EDN: QDXVHM. DOI: 10.17150/2713-1734.2023.5(1).66-74.
2. Bortsov Yu.A., Golik S.E., Polyakhov N.D., Putov V.V., Sorokin A.V., Shmelev V.A. *Patent No. 1596305 A1 USSR, G05B 13/00. The device of a convenient electric drive of the stand for transmission tests. No. 4375112. Applied 02/08/1988. published 09/30/1990.* 5 p.
3. Rassudov L.N. On the dynamics of the ACS of the speed of the servo drive in the presence of an elastic link with distributed parameters. *Elektrichestvo = Electricity*, 1981, no. 9, pp. 34–37. (In Russian).

4. Rassudov L.N. *Electric drives with distributed parameters of mechanical elements*. Leningrad, Energoatomizdat Publ., 1987. 144 p.
5. Panovko Ya.G. *Fundamentals of the applied theory of elastic oscillations*. Moscow, Mashgiz Publ., 1957. 335 p.
6. Kiselev N.V., Myadzel V.N., Rassudov L.N. *Electric drives with distributed parameters*. Leningrad, Sudo-stroenie Publ., 1985. 220 p.
7. Belov M.P., Novikov V.A., Rassudov L.N. *Automated electric drive of typical production mechanisms and technological complexes*. Moscow, Akademiya Publ., 2007. 576 p.
8. Bortsov Yu.A., Polyakhov N.D., Putov V.V. *Electromechanical systems with adaptive and modal control*. Leningrad, Energoatomizdat Publ., 1984. 216 p.
9. Fursov V.B. *Drive simulation*. 2<sup>nd</sup> ed. Saint Petersburg, Lan Publ., 2019. 220 p.
10. Bortsov Yu.A., Sokolovskii G.G. *Automated electric drive with elastic links*. Saint Petersburg, Energoatomizdat Publ., 1992. 288 p.

### Информация об авторе

**Сорокин Александр Васильевич** — кандидат технических наук, доцент, кафедра математических методов и цифровых технологий, Байкальский государственный университет, г. Иркутск, Российская Федерация, e-mail: sorokinav@bgu.ru.

### Information about the Author

**Alexander V. Sorokin** — PhD in Technical Sciences, Associate Professor, Department of Mathematical Methods and Digital Technologies, Baikal State University, Irkutsk, Russian Federation, e-mail: sorokinav@bgu.ru.

### Для цитирования

Сорокин А.В. Математическая модель процессов, протекающих в механической части испытательного стенда трансмиссий / А.В. Сорокин. — DOI 10.17150/2713-1734.2023.5(2).222-232. — EDN SABWFS // System Analysis & Mathematical Modeling. — 2023. — Т. 5, № 2. — С. 222–232.

### For Citation

Sorokin A.B. Mathematical Model of the Processes Occurring in the Mechanical Part of the Transmission Test Bench. *System Analysis & Mathematical Modeling*, 2023, vol. 5, no. 2, pp. 222–232. (In Russian). EDN: SABWFS. DOI: 10.17150/2713-1734.2023.5(2).222-232.