Научная статья
УДК 519.6

В.И. Зоркальцев
Байкальский государственный университет,
г. Иркутск, Российская Федерация

Уточнение и обобщения тепловой теоремы Максвелла

Аннотация. В знаменитом трактате об электричестве и магнетизме Дж.К. Максвелл привел и доказал теорему о том, что в пассивной системе проводников ток распределяется таким образом, чтобы минимизировать потери мощности на нагревание. В таком виде тепловая теорема Максвелла справедлива только для пассивных электрических цепей, когда нет электродвижущих сил (Э. Д. С.). Предлагается изменить формулировку теоремы на утверждение, что ток распределяется таким образом, чтобы минимизировать потерю одной второй мощности на нагревание. Это уточнение позволяет, как показано в статье, распространить такую тепловую теорему и на активные электрические цепи, в которых могут быть источники Э. Д. С. Это позволяет сделать физически интерпретируемыми множители Лагранжа ограничений, выражающих первый закон Кирхгофа. Множители Лагранжа при ограничениях в таком случае совпадают с потенциалами в узлах электрической цепи. Указанное уточнение приводит и к новым интересным формулировкам тепловой теоремы в том числе о распределении напряжений по узлам электрической цепи.

Ключевые слова. Электрические цепи, уточнение тепловой теоремы Максвелла, симметричная двойственность в оптимизации, тепловые теоремы для распределения напряжений по узлам.

Информация о статье. Дата поступления: 23 сентября 2022 г.

Original article

V.I. Zorkaltsev
Baikal State University,
Irkutsk, Russian Federation

Refinement and Generalization of Maxwell's Thermal Theorem

Abstract. In the famous treatise on electricity and magnetism, J.K. Maxwell led to the conclusion that in a passive system of conductors, the current increases sharply in order to approach an increase in heating power. In such cases, Maxwell's thermal gain is valid only for passive electrical circuits when there are no electromotive forces (EMFs). We proposed to change the formulation of the theorem to the statement that the current is distributed in such a way as to minimize the loss of one second of the power for heating. This refinement allows, as shown in the article, to extend such a thermal theorem to active electrical circuits in which there may be sources of E.D.S. This allows us to make physically interpretable Lagrange multipliers of constraints expressing the first Kirchhoff law. The Lagrange multipliers under restrictions in this case coincide with the potentials in the nodes of the electric circuit. This refinement also leads to new interesting formulations of the thermal theorem including the distribution of voltages over the nodes of the electrical circuit.

Keywords. Electrical circuits, refinement of Maxwell's thermal theorem, symmetric duality in optimization, thermal theorems for stress distribution over nodes.

Article info. Received 23 September, 2022.

DOI: 10.17150/2713-1734.2022.4(4).317-342

Введение

В любой системе проводников, где нет источников Э. Д. С. и токи отвечают закону Ома, тепло, генерируемое установившимся токораспределением, всегда меньше, чем токами, распределенными любым другим образом, но согласующимися с условиями притекания и вытекания.

Дж.К. Максвелл «Трактат об электричестве и магнетизме»

Максвелл, в своем трактате «об электричестве и магнетизме» [1] отклоняется от основной темы, формулирует и доказывает утверждение, которое приведено выше в качестве эпиграфа. Максвелл приводит данную теорему просто как факт, не объясняя почему и зачем он появляется. Очевидно это дань «принципу наименьшего действия» активно проявившегося еще в XVIII в. благодаря работам Мопертюи, Эйлера, Лагранжа, Гамильтона, в результате введенного П. Ферма для объяснения закона Снелла принципа наименьшего времени [2].

Как известно, при расчете распределения по электрической цепи постоянного тока необходимо учитывать три условия: первый закон Кирхгофа, второй закон Кирхгофа и закон Ома. Заданными также считаются токи входящие и выходящие из этой цепи. На отдельных дугах могут быть источники электродвижущей силы (Э. Д. С.). Если они есть, то цепь называется активной. Если на всех дугах нет Э. Д. С., то электрическая цепь называется пассивной.

Известно, что потери мощности из-за теплового излучения от прохождения тока на каждой дуге выражаются в виде произведения квадрата силы тока на заданный (при выражении закона Ома) коэффициент сопротивления в данной дуге. В тепловой теореме Максвелла утверждается, что для пассивной цепи, если найти решение задачи минимизации суммарных потерь мощности по всем дугам при выполнении только первого закона Кирхгофа, то получим решение исходной задачи потокораспределения, учитывающее второй закон Кирхгофа и закон Ома. И это Максвелл строго доказал, используя подход, который можно назвать методом возможных направлений.

Иными словами, Максвелл доказал, что для пассивной электрической цепи второй закон Кирхгофа и закон Ома можно заменить постановкой проблемы расчета потокораспределения в виде задачи оптимизации с целевой функцией имеющий четкий физический смысл — минимизация потерь мощности в цепи.

Если в указанной задаче оптимизации минимизируемую целевую функцию умножить на любое положительное число, то, конечно, получим то же самое оптимальное решение. В том числе, если умножим на 0.5. Нередко выражения, содержащие составляющие в виде квадратов от параметров, по которым может осуществляться дифференцирование, содержат именно такой сомножитель. Он превращается в единицу после дифференцирования.

Хорошим примером, приводившимся в [3], служит выражение кинетической энергии:

$$E = 0.5\, MV^2, \tag{1}$$

где M — масса, V — модуль (абсолютная величина) скорости движения тела. За счет выбора единиц измерения массы, расстояния или времени (при определении скорости) можно легко избавится от коэффициента 0.5. Почему это не сделано? Да хотя бы потому, что кинетическая энергия жестко связана с не менее важным показателем — импульсом

$$\boldsymbol{P} = M\boldsymbol{V}. \tag{2}$$

В то время как энергия скалярная величина, импульс является вектором, имеющим три компоненты в декартовой системе координат, так же, как и скорость. Этот факт здесь выражен через представление импульса и скорости жирными буквами $\boldsymbol{P}$, $\boldsymbol{V}$.

Импульс, как известно, является вектором частных производных (градиентом) кинетической энергии

$$\boldsymbol{P} = \nabla_v E\,. \tag{3}$$

Если убрать в выражении кинетической энергии (1) коэффициент 0.5, то в выражении импульса (2), в силу (3) появится коэффициент 2. Системы физических единиц сформированы так, что коэффициент 0.5 остался при кинетической энергии, а импульс оказался без всяких дополнительных коэффициентов. В некотором смысле импульс более информативное понятие, поскольку он показывает и направление движения. Из значения импульса можно однозначно определить значение кинетической энергии, а только из значения кинетической энергии импульс определить нельзя, не зная направление вектора скорости.

В представлении Максвелла распределения токов в электрической цепи в виде экстремальной проблемы в минимизируемой целевой функции находилась как раз сумма по ветвям цепи произведений квадрата тока на сопротивление. Потеря мощности на данной ветви выражается зависимостью

$$D(I) = RI^2,$$

где R — сопротивление, I — ток. Производная этой зависимости даст удвоенное значение напряжения, порождающего по закону Ома ток I:

$$2U(I) = 2RI.$$

Представляется естественным рассмотреть модификацию экстремальной модели Максвелла, в которой целевая функция содержит не потери мощности от токов по всем ветвям, а только половину этих потерь. Тогда производные таких составляющих целевых функций окажутся вполне физически интерпретируемыми величинами — напряжениями, необходимыми для протекания данных значений токов.

Как будет показано далее такая модернизация оптимизационной модели Максвелла позволит существенно расширить возможности экстремальных постановок задачи распределения токов в электрических цепях. Можно будет одновременно рассматривать и случай активных цепей. А также, что очень важно, известные математические факты позволят получать новые постановки задачи распределения токов по дугам и напряжений в узлах электрической цепи.

Сначала приведем некоторые факты так называемой симметричной двойственности в оптимизации для одной из относительно простых задач — минимизации выпуклой дифференцируемой функции при линейных ограничениях равенствах. Симметричная двойственность использовалась в некоторых работах предшественников. В частности, — в книге Дж.Б. Дениса [4] на которую мое внимание обратил А.З. Гамм при обсуждениях, рассматриваемых в данной статье вопросов. Одним из приложений симметричной двойственности является использование вытекающих из нее фактов для построения эффективных методов решения систем линейных уравнений и неравенств, что отражено в работах А.И. Голикова и Ю.Г. Евтушенко [5; 6]. Интересным приложением является проблема регуляризации задач оптимизации. Этой проблемой активно занимались сотрудники уральской школы исследования операций И.И. Еремин, Н.Н. Астафьев, Л.Д. Попов и др. [7; 8]. Автор благодарен этим коллегам за полезные обсуждения темы симметричной двойственности, за бескорыстную помощь в проведении исследований и публикации результатов. Увы, уже некоторых из них (И.И. Еремина, А.З. Гамма, А.И. Голикова) нет теперь с нами.

Данная статья является развитием ранее осуществленных автором публикации по симметричной двойственности в оптимизации. В отличии от статей [9–11] здесь ограничимся рассмотрением только задач оптимизации при линейных ограничениях равенствах (т.е. ограничения неравенства здесь рассматривать не будем) и только одним приложением симметричной двойственности — электрическими цепями. Это позволит более подробно рассмотреть именно электрические цепи и новые для них факты, вытекающие из симметричной двойственности.

Пример. Пусть электрическая цепь состоит из двух параллельно подключенных проводников. На первом из них сопротивление $R_1 = 2$ ом. На втором проводнике сопротивление $R_2 = 8$ ом. По цепи передается суммарный ток в 10 ампер. Из известных формул распределения тока при параллельных соединениях находим напряжение

$$U = I\frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} = 10 \times \frac{16}{10} = 16 \text{ вольт.}$$

Затем находим токи на обоих ветвях

$$I_1 = \frac{U}{R_1} = \frac{16}{2} = 8 \text{ ампер, } I_2 = \frac{U}{R_2} = \frac{16}{8} = 2 \text{ ампера.}$$

Потери мощности составят величину

$$N = R_1 I_1^2 + R_2 I_2^2 = 128 + 4 = 132 \text{ ватт.}$$

Если возьмем другое распределение тока в 10 ампер по этим двум проводникам, например,

$$I_1 = I_2 = 5 \text{ ампер,}$$

то получим б**о**льшие потери

$$N = R_1 I_1^2 + R_2 I_2^2 = 50 + 200 = 250 \text{ ватт.}$$

Конечно, перебирать все возможные распределения тока в 10 ампер между двумя проводниками невозможно, да и не нужно. Надо доказать, что полученное первоначально распределение токов является решением задачи оптимизации:

$$R_1 I_1^2 + R_2 I_2^2 \to \min,$$

при условии

$$I_1 + I_2 = 10.$$

Определим функцию Лагранжа этой задачи

$$L(I_1, I_2, u) = R_1 I_1^2 + R_2 I_2^2 + \mathrm{u}(10 - I_1 - I_2),$$

где u множитель Лагранжа ограничения. Приравняв производные по всем трем переменным функции Лагранжа нулю получим систему их трех уравнений с тремя неизвестными:

$$2R_1 I_1 - u = 0,$$

$$2R_2 I_2 - u = 0,$$

$$I_1 + I_2 - 10 = 0.$$

Решением системы при рассматриваемых значениях сопротивлений будут полученные первоначально значения токов $I_1 = 8$ ампер, $I_2 = 2$ ампера. При этом значение множителя Лагранжа $u = 32$ окажется в два раза больше полученного ранее напряжения $U = 16$.

Если же в рассмотренной задаче целевую функцию умножить на 0.5, то получим такие же оптимальные значения токов, а множитель Лагранжа u совпадет с напряжением U.

Приведем и другой аргумент в пользу целесообразности минимизировать только половину потерь мощности. Пусть в дополнение к рассмотренному примеру на первой ветви находится Э.Д.С., действующая в направлении тока, приращение напряжения от которого составляет значение $E = 10$ вольт. Рассмотрим задачу оптимизации

$$0.5(R_1I_1^2 + R_2I_2^2) - EI_1 \rightarrow \min,$$

$$I_1 + I_2 = 10.$$

Построим для нее функцию Лагранжа, приравняем нулю производные по всем трем переменным, включая множитель Лагранжа ограничения (обозначим его u). В результате решения полученной системы из трех уравнений с тремя неизвестными получим $I_1 = 9$ ампер, $I_2 = 1$ ампер, $u = 8$ вольт. Такие же значения токов мы получим в результате решения системы линейных уравнений на основе закона Ома и учета Э.Д.С. первой дуге:

$$U + E - R_1I_1 = 0,$$

$$U - R_2I_2 = 0,$$

$$I_1 + I_2 = 10.$$

Здесь искомая величина U является напряжением на обеих ветвях. Она в данном случае совпадет с указанным значением множителя Лагранжа $U = 8$. В целевой функции кроме минимизируемой половины потерь мощности в цепи на нагревание проводников есть еще составляющая EI_1 равная затратам мощности извне на Э.Д.С. Поскольку эта составляющая со знаком минус, то, следовательно, в рассматриваемой задаче одновременно минимизируется половина потерь мощности в цепи и максимизируются затраты мощности извне на действующую в цепи Э.Д.С.

Большой интерес представляет построение и энергетическая интерпретация двойственных и самосопряженных задач оптимизации к рассмотренным в этих двух примерах. Полагаю, что после изучения данной статьи читатель должен быть способен сам построить и проанализировать двойственные задачи для рассмотренных здесь примеров.

Некоторые факты симметричной двойственности в оптимизации

Если ищется максимум или минимум некоторой функции многих переменных при условии, что между этими переменными имеется связь, задаваемая одной или несколькими функциями, то нужно прибавить к функции, экстремум которой ищется, задающие уравнения связи, умноженные на неопределенные множители и искать затем максимум или минимум построенной суммы, как если бы переменные были независимы.

Ж.Л. Лагранж «Аналитическая механика»

Обозначим Z множество выпуклых дифференцируемых функций вещественного аргумента равные нулю в нуле, производные которых являются непрерывными функциями, возрастающими от $-\infty$ до $+\infty$ и равны нулю в нуле. Каждой функции из Z соответствует единственная функция из этого множества, производная которой является обратной функцией для производной исходной функции.

Пусть F_j, G_j — пары функций из множества Z с взаимно обратными производными, для $j = 1, ..., n$ при некотором натуральном n. Пары функций с взаимно обратными производными принято называть сопряженными по Лежандру или просто сопряженными. Производные функций F_j, G_j обозначим f_j, g_j

Введем функции от векторов x и y из R^n:

$$F(x) = \sum_{j=1}^{n} F_j(x_j);$$

$$G(y) = \sum_{j=1}^{n} G_j(y_j).$$

Пусть $f(x)$, $g(y)$ вектор-функции $R^n \rightarrow R^n$, компонентами которых являются функции $f_j(x_j)$, $g_j(y_j)$ при $j = 1, ..., n$, где x, y векторы R^n. То есть,

$$f(x) = \nabla F(x),\ g(y) = \nabla G(y), \tag{4}$$

где символ ∇ обозначает градиент, вектор частных производных находящейся за этим символом функции при указанном значении аргумента.

Сопряженность функций F_j, G_j означает, что при любых x и y из R^n

$$g(f(x)) = x,\ f(g(y)) = y. \tag{5}$$

Заданы матрица А размера $m \times n$, векторы $b \in R^m$, $c \in R^n$. **Исходной** будем **называть следующую задачу оптимизации**:

$$N(x) \equiv F(x) - c^T x \to \min, \tag{6}$$

при условии

$$Ax = b. \tag{7}$$

Двойственной назовем следующую задачу оптимизации:

$$M(u, y) \equiv G(y) + b^T u \to \min, \tag{8}$$

при условии

$$y + A^T u = c. \tag{9}$$

Эти задачи обе либо имеют оптимальные решения, либо обе не имеют оптимальных решений. Прямая задача не имеет оптимального решения только в случае отсутствия допустимых решений, то есть только в случае противоречивости системы линейных уравнений (7). Двойственная задача не имеет оптимального решения только в случае неограниченности снизу ее целевой функции на множестве допустимых по условию (9) решений. А это возможно в том и только в том случае, если существует вектор $v \in R^m$, при котором

$$A^T u = 0,\ b^T v < 0. \tag{10}$$

Заметим, в последнем условии (10) вместо неравенства нулю можно было поставить равенство любому не равному нулю вещественному числу. В приведенном выше утверждении констатируется совместность одной и только одной из систем линейных уравнений и неравенств (7), либо (10). Это нечто иное как теорема Фредгольма об альтернативных системах линейных уравнений, которую следует рассматривать как частный случай теорем об альтернативных системах линейных неравенств [12].

Докажем, что проблема поиска решения исходной задачи оптимизации (6), (7) равносильна поиску ветров x, u, y удовлетворяющих следующим условиям

$$Ax = b, \tag{11}$$

$$y + A^T u = c, \tag{12}$$

$$y_j = f_j(x_j) \quad x_j = g_j(y_j), j = 1, ..., n. \tag{13}$$

Введем функцию Лагранжа задачи (6), (7):

$$L(x, u) = F(x) - c^T x + u^T (Ax - b). \tag{14}$$

Здесь вектор u рассматривается как вектор множителей Лагранжа ограничений (11). Приравняв нулевым векторам векторы частных производных этой функции

$$\nabla_x L(x, u) = f(x) - c + A^T u,$$

$$\nabla_x L(x, u) = Ax - b$$

получим соотношения (11), (12), учитывая, что выражения (13) выполняются в силу условия сопряженности (4), (5).

Докажем теперь, что и задача (8), (9) равносильна системе (11)–(13). Рассмотрим функцию Лагранжа двойственной задачи:

$$DL(y, u, x) = G(y) + b^T u + x^T(c - A^T u - y).$$

Здесь вектор x используется как вектор множителей Лагранжа ограничений (9) .Рассмотрим частные производные этой функции:

$$\nabla_y DL(y, u, x) = g(y) - x,$$

$$\nabla_y DL(y, u, x) = b - Ax,$$

$$\nabla_y DL(y, u, x) = c - A^T u - y,$$

Приравняв эти выражения нулевым векторам получим требуемые соотношения (11)–(13).

Итак, мы пришли к тому, что приведенные здесь исходная и двойственная задачи оптимизации равносильные, если наряду с исходно заданными переменными этих задач в их решения включать и множители Лагранжа ограничений этих задач. Причем эти задачи оптимизации равносильны проблеме поиска решения системы уравнений (11)–(13).

Можно отметить, что деление задач на исходную и двойственную в рассматриваемом здесь случае условно. В данном случае двойственная к двойственной задаче оптимизации совпадает с исходной задачей оптимизации. Такой случай уместно называть ***симметричной двойственностью.***

Замечание о множителях Лагранжа. *Эти множители играют большую роль в современной теории оптимизации. Они используются для обоснования оптимальности полученного решения, для выявления случаев отсутствия допустимых или оптимальных решений Множители Лагранжа используются при теоретических обоснованиях алгоритмов оптимизации. Эти множители полезны для анализа чувствительности получаемого решения к варьированию ограничений задачи. Они очень важны для содержательной интерпретации получаемых решений. Они часто используются в самих алгоритмах оптимизации.*

В некоторых случаях алгоритмы оптимизации строятся в виде процесса улучшения значений множителей Лагранжа Это происходит за счет использования двойственных задач оптимизации, в которых переменными величинами выступа-

ют множители Лагранжа ограничений исходной задачи оптимизации. Двойственная задача может порождать двойственную к ней задачу оптимизации. Возможны ситуации, частный случай которых рассматривается в данной статье, когда двойственна к двойственной задаче совпадет с исходной задачей. Тогда процесс построения двойственных задач замыкается на повторах всего двух задач. Причем обе из них имеют содержательный смысл. Известным примером такой симметричной двойственности являются задачи линейного программирования.

Часто, если исходная задача формулируется на минимум рассматриваемой в ней целевой функции, то двойственная задача формулируется на максимум некоторой целевой функции. В нашем случае обе задачи сформулированы на минимум целевых функций. Всегда умножением на минус единицу целевой функции можно перейти от задачи минимизации к задаче максимизации. В нашем случае рассмотрение обеих задач в виде минимизации целевых функций целесообразно для содержательной интерпретации задач и решений применительно к проблеме расчета токов, потенциалов и напряжения электрической цепи.

Варианты эквивалентных задач

Законы подобны паутине: слабого они запутывают,
а сильный их прорвет.

Солон, правитель и философ Афин

Кроме представленных трех можно дать еще ряд формулировок задач, эквивалентных приведенным. Например, можно свести задачу (8), (9) к проблеме безусловной минимизации выпуклой дифференцируемой функции. Выразим из (9) вектор y через вектор u, придем к задаче безусловной минимизации дифференцируемой выпуклой функции от m переменных.

$$M(c - A^T u, u) \rightarrow \min, u \in R^m. \qquad (15)$$

Найдя в результате решения этой задачи вектор u, затем прямым счетом из (9) вычисляем вектор y и из (13) вектор x.

В содержательном отношении особый интерес представляют следующие две экстремальные задачи с искомыми величинами, включающими переменные исходной и двойственной задач.

Самосопряженная задача оптимизации: при условиях (11), (12)

$$F(x) + G(y) - c^T x + b^T u \rightarrow \min. \qquad (16)$$

Эта задача названа самосопряженной, поскольку двойственная к ней с ней же и совпадает. Задача образована формальным соединением прямой и двойственной задач. Важным новым моментом является то, что для нее заранее известно оптимальное значение целевой функции. Для любых допустимых по условиям (11), (12) решений целевая функция (16) неотрицательная. Она равна нулю в том и только в том случае, если получены оптимальные решения прямой и двойственной задач.

Следовательно, эквивалентной рассматриваемым задачам будет следующая **самосопряженная система уравнений**: при выполнении (11), (12),

$$F(x) + G(y) - c^T x + b^T u = 0. \tag{17}$$

Симметричная задача оптимизации: при выполнении (11), (12),

$$F(x) + G(y) - \sum_{j=1}^{n} x_j y_j \to \min. \tag{18}$$

Здесь третья сумма в целевой функции заменила третью и четвертую суммы в целевой функции самосопряженной задачи оптимизации. Для симметричной задачи оптимизации также известно, что ее целевая функция неотрицательная при любом допустимом по условиям (11), (12), решении. В том и только в том случае, если такое допустимое решение является оптимальным, целевая функция (18) равна нулю.

Следовательно, эквивалентной всем рассматриваемым задачам будет следующая **симметричная система уравнений**: при выполнении (11), (12),

$$F(x) + G(y) - \sum_{j=1}^{n} x_j y_j = 0. \tag{19}$$

Электрические цепи

Если сделать так, чтобы токи протекали
через массу вещества, удовлетворяющего закону Ома,
то токи распределятся в этой массе так, чтобы скорость
с какой генерируется в ней тепло, была наименьшей.

Р. Фейнман «Фейнмановские лекции по физике»

Электрическая цепь представляется в виде направленного графа. Пусть i = 1, ..., m номера узлов электрической цепи, j = 1, ..., n номера ветвей, А — матрица инцидентности узлов и дуг. Каждый столбец этой матрицы представляет одну из дуг направленного графа электрической цепи. В нем имеется только два ненулевых элемента. Один имеет значение +1. Он соответствует номеру узла, в который направлена данная дуга. Другой ненулевой элемент равен –1. Он соответствует номеру узла, из которого направлена данная дуга. Напомним, ветвью электрической цепи называется ее участок с одним и тем же током. Узел, — точка соединения трех и более ветвей

Компоненты вектора b соответствуют заданным токам входящим в систему в узле i (если $b_i < 0$) или выходящим из системы (если $b_i > 0$). Возможны случаи промежуточных или пассивных узлов, для которых $b_i = 0$.

Вектор c имеет компоненты равные величине Э.Д.С. на данной дуге. Если на дуге j электрической цепи Э.Д.С. отсутствует, то $c_j = 0$.

Переменные величины составляют векторы: x — токи по ветвям; u — потенциалы в узлах; y — напряжения на ветвях. Под термином напряжение на дуге понимается сумма двух величин: разницы потенциалов в узлах на концах дуги и величины действующей на этой ветви Э. Д. С. Обе величины и их результирующая сумма определяются как положительные значения в направлении выбранном для данной ветви ориентации.

Ориентация дуг графа может быть произвольной. Если $x_j > 0$, то ток течет в направлении выбранной ориентации. Если $x_j < 0$, то ток течет в направлении противоположном выбранной при задании направленного графа ориентации данной ветви.

Пусть заданные положительные величины h_j являются сопротивлениями на ветвях $j = 1, ..., n$. Введем функции

$$f_j(x_j) = h_j x_j,\ g_j(y_j) = (1 / h_j) y_j,\ j = 1, ..., n. \qquad (20)$$

Обе эти функции выражают закон Ома. В первом случае в виде зависимости напряжения от тока помноженного на сопротивление. Во втором случае ток выражается как произведение напряжения на коэффициент проводимости (величина обратная сопротивлению).

Первообразные функций (20), с учетом того, что они должны находится в множестве Z и, следовательно, должны равняться нулю в нуле, получают следующие выражения

$$F_j(x_j) = 0.5 h_j x_j^2,\ G_j(y_j) = 0.5\left(\frac{1}{h_j}\right) y_j^2, j = 1, ..., n. \qquad (21)$$

Каждое из этих выражений соответствует половине потерь мощности на дуге j. В первом случае потери представляются функцией от тока. Во втором случае потери выражаются в виде функции от напряжения.

Рассмотрим сначала систему (11)–(13) применительно к электрической цепи. Здесь условие (11) представляет **первый закон Кирхгофа** — сумма входящих в данный узел токов должна равняться сумме выходящих токов с учетом токов входящих из вне или выходящих во вне в данном узле. Это можно представить и в таком виде

$$Ax - b = 0.$$

Условие (12) представляет баланс напряжений на отдельных дугах. Разница потенциалов в узлах между началом и концом данной ветви плюс действующая на ней Э.Д.С. равны напряжению, который будет создавать ток на этой дуге. Это можно представить в такой форме

$$y = c - A^T u. \tag{22}$$

Это условие будем называть **вторым законом Кирхгофа**, хотя оно и отличается от часто используемой формы представления второго закона Кирхгофа. На мой взгляд условие (22) более удобно. Из него можно вывести второй закон Кирхгофа в используемых часто формулировках. При этом такое условие **вполне симметрично** первому закону.

Нередко используемой формулировке второго закона Кирхгофа требуется рассматривать как минимум базисный набор контуров, из линейных комбинаций которых можно получить любые другие контуры в данной сети. Напомним, контуром (иногда называют замкнутым контуром) электрической цепи называется замкнутый путь, проходящий через несколько ветвей и узлов электрической цепи, в котором каждый узел и ветвь могут оказаться не более одного раза.

При этом в используемых нередко формулировках второго закона Кирхгофа требуется, чтобы по каждому контуру сумма Э. Д. С. равнялась сумме токов умноженных на сопротивления по всем входящим в этот контур ветвям. То есть, одновременно учитывался и закон Ома. Это условие будет выполнятся для решения задачи распределения токов. В вычислительном отношении оно не удобно. Лучше приравнять сумме напряжений по всем входящим в данный контур ветвям. А связь напряжений с токами, т. е. закон Ома, лучше записать отдельно. Также лучше априори не связываться с выбором контуров. Для цепей со множеством узлов и ветвей выбор всех базисных контуров представляет порой некоторую вычислительную трудность. Математика сама подсказывает целесообразность использования выражения (19) в качестве второго закона Кирхгофа. Такое условие вполне симметрично формулировке первого закона Кирхгофа.

Условия (13), как отмечалось являются двумя формами выражения закона Ома. Можно было оставить только одно, любое из них. Выполнение второго условия будет следовать из свойства сопряженности функций $F_j(x_j)$ и $G_j(y_j)$.

Рассмотрим исходную задачу оптимизации (6), (7) применительно к электрическим цепям. Здесь в виде условия (7) учитывается только первый закон Кирхгофа. Второй закон Кирхгофа и закон Ома учитываются неявно через минимизируемую целевую функцию. Эта функция имеет понятный энергетический смысл. Первая составляющая — это **минимизируемая половина потерь мощности**, зависящая согласно первому выражению в (17) от величин токов по дугам. Вторая составляющая — максимизируемый расход мощности на Э.Д.С по ветвям (если обе составляющие объединить с общим знаком минус).

Отметим, что при такой постановке множители Лагранжа ограничений (7) получили четкий физический смысл. Они соответствуют потенциалам в узлах. Если убрать коэффициент 0.5 в потерях мощности и иметь коэффициенты вектора с равными нулю, то получим конечно такое же распределение токов, но множители Лагранжа ограничений (7) окажутся в два раза больше, чем потенциалы в узлах. То есть и в этом аспекте математика подсказывает правильную постановку задачи: необходимо ставить коэффициент 0.5 при составляющей, описывающей зависимость потерь мощности от распределения токов. Тогда множители Лагранжа будут иметь четкий физический смысл.

Перейдем к двойственной задаче оптимизации (8), (9). Здесь в качестве ограничения (9) в явном виде учитывается только рассматриваемый здесь нами аналог второго закона Кирхгофа. Первый закон Кирхгофа и закон Ома учитывается неявно, через минимизируемую целевую функцию. Первая составляющая этой функции — **минимизируемая половина потерь мощности**, зависящая, согласно второму выражению в (21), от напряжений по ветвям. Вторая составляющая — максимизируемая величина затрат мощности на поставку извне в цепь и поставку во вне из цепи заданных вектором b токов.

Данная задача является новой. Отметим, что в этой задаче в качестве переменных рассматриваются только напряжения в узлах и перепады напряжений по ветвям. Величины токов появляются как множители Лагранжа ограничений на балансы напряжений. То, что множители Лагранжа оказались вполне физически понятными величинами также следует рассматривать в качестве достоинства этой модели.

Использование экстремальных постановок для расчета электрических цепей расширяет вычислительные возможности. Это хорошо иллюстрирует возможность расчета всех показателей электрической цепи на основе решения удобной в вычислительном плане задачи минимизации (15). Целевая функция у этой задачи, при использовании линейных зависимостей (20), в том числе применительно к рассматриваемым здесь электрическим цепям, квадратичная выпуклая. Приравняв градиент этой функции нулевому вектору, получим систему линейных уравнений с симметричной неотрицательно определенной матрицей. Для решений таких систем линейных уравнений имеются хорошие вычислительные методы и реализующие их программы на ЭВМ. Следует отметить, что напряжения в узлах, как правило, определяются с точностью до добавления к ним константы [4, 9]. Поэтому можно в одной из вершин цепи априори задать величину потенциала (например, положить ее равной нулю) и вычисления осуществлять только для напряжений оставшихся вершин.

Пусть вектор e из R^m *имеет все компоненты равными единице,* $e_i = 1$, $i = 1, \ldots, m$. *Поскольку в каждом столбце матрицы A только два ненулевых элемента в сумме равные нулю, то*

$$A^T e = 0. \tag{23}$$

Если

$$\sum_{i=1}^{m} b_i e_i \neq 0,$$

то для $v = e$ *или для* $v = -e$ *справедливы условия (10). Поэтому необходимым условием существования решения у всех рассматриваемых здесь вариантов записи модели расчета электрической цепи является равенство нулю суммы всех компонент вектора b,*

$$\sum_{i=1}^{m} b_i = 0. \tag{24}$$

Этот факт вытекает и из физических соображений: сумма токов входящих в электрическую цепь и выходящих из цепи должна быть равна нулю. В цепи нет потерь токов и каких-либо источников появления дополнительных токов.

Указанный факт становится достаточным условием существования решения, если граф, представляющий данную электрическую цепь является связным: из любого узла электрический ток может попасть в любой другой узел по существующим ветвям графа (независимо от их ориентации). Если граф несвязный, то его узлы разбиваются на конечное число подмножеств, в каждом

DOI: 10.17150/2713-1734.2022.4(4).317-342

из которых подграф, состоящий из некоторого подмножества узлов и связывающих их ветвей, будет связным. При этом у исходного графа нет дуг, связывающих узлы из разных подмножеств. То есть электрическая цепь разбивается на две или большее количество электрических цепей со связными узлами. Для каждой такой связанной цепи необходимым и достаточным условием существования решения будет равенство нулю входящих из вне и выходящих во вне токов.

Пусть граф электрической цепи связный. Тогда соотношения (23), (24) означают, что среди ограничений равенств, выражаемых условием (11) одно и только одно (любое) является линейной комбинацией других ограничений.

Это также означает, что двойственная задача оптимизации имеет неоднозначное оптимальное решение по вектору переменных u. Прибавление к оптимальному значению вектора u вектора e с любым сомножителем γ даст также оптимальное значение для вектора u + γe. Поэтому одно из ограничений исходной задачи оптимизации можно исключить из рассмотрения. Это равносильно тому, что значение одной из компонент вектора u априори зафиксировано равным нулю.

Экстремальные постановки дают и полезную физическую интерпретацию получаемых решений. В частности, самосопряженная задача оптимизации (11), (12), (16) показывает, что объединение прямой и двойственной экстремальных постановок расчета электрических цепей приводит к задаче минимизации разницы между суммарными потерями мощности по всем ветвям на нагревание и затратами мощности извне на данную электрическую цепь. Для окончательного оптимального решения, согласно (17), потери мощности внутри цепи совпадают с мощностью затрачиваемую извне. Отметим, что у величины

$$\left(\sum_{j=1}^{n} c_j x_j - \sum_{i=1}^{m} b_i u_i\right),$$

первая составляющая — мощность, затрачиваемая извне на данную электрическую цепь в виде Э.Д.С. на всех ветвях, где есть Э.Д.С. Если на ветви j нет Э.Д.С., то $c_j = 0$. Если направление повышения напряжение оказалось противоположным выбранному для данной ветви за положительное, то $c_j < 0$. Вторая составляющая — мощность, затрачиваемая извне на передачу через данную электрическую цепь токов составляющих вектор b.

Симметричная оптимизационная задача (11), (12), (18) базируется на том факте, что при любых значениях тока x_j и напряжений y_j для любой ветви $j = 1, ..., n$ выполняется неравенство

$$F_j(x_j) + G_j(y_j) \geq \sum_{j=1}^{n} x_j y_j. \qquad (25)$$

Если ток и напряжение на данной дуге согласованные величины, то есть для них выполняются соотношения (13), то это неравенство выполняется в виде равенства. Если соотношения (13) не выполняется, то есть рассматриваемые (скажем на данной итерации вычисления) значения тока и напряжения не связаны законом Ома, нарушают его, то неравенство (25) выполняется в строгой форме. Отсюда следует, что условие (19) выполняется в том и только в том случае если на всех дугах цепи выполняется закон Ома.

Наглядное доказательство того, что выполнение закона Ома на всех дугах можно заменить условием (19). Потери мощности на проводнике можно представить тремя возможными способами: в виде зависимости от коэффициента сопротивления и тока, как это было сделано в (10); в виде зависимости от коэффициента проводимости и перепада напряжения; в виде произведения тока на перепад напряжения вызывающего этот ток:

$$D(I)=RI^2 = (1 / R)\ U^2 = I \times U. \qquad (26)$$

Равенства (26) означают, что при выполнении закона Ома сумма половин первых двух величин в представлении (26) потерь мощности D(I) равна величине потерь по третьему выражению. Если же для рассматриваемых (на данном этапе вычислений) величин тока I и напряжения U закон Ома не выполняется

$$U \neq RI,$$

то имеем строгое неравенство

$$RI^2 + (1 / R)U^2 > 2I \times U.$$

На рис. 1 представлена ситуация, когда для переменных x_j и y_j для данного j выполняются соотношения (13), т.е. на данной ветви для рассматриваемых на ней тока и напряжения выполняется закон Ома. Это выражается в том, что пересечение указанных на рисунке значений x_j и y_j находится на прямой соответствующей функции g_j ,выражающей здесь закон Ома. Произведение тока на напряжение является площадью заштрихованного прямоугольника. Это соответствует величине потерь мощности на данной дуге.

Эта площадь представляется в виде суммы площадей двух треугольников. Один из них расположен ниже прямой, выражающей закон Ома. Площадь этого треугольника $F_j(x_j)$ названа потерями мощности, зависящими от силы тока. Второй треугольник расположен выше прямой выражающей закон Ома. Площадь этого треугольника $G_j(y_j)$ названа потерями мощностями, зависящими от напряжения.

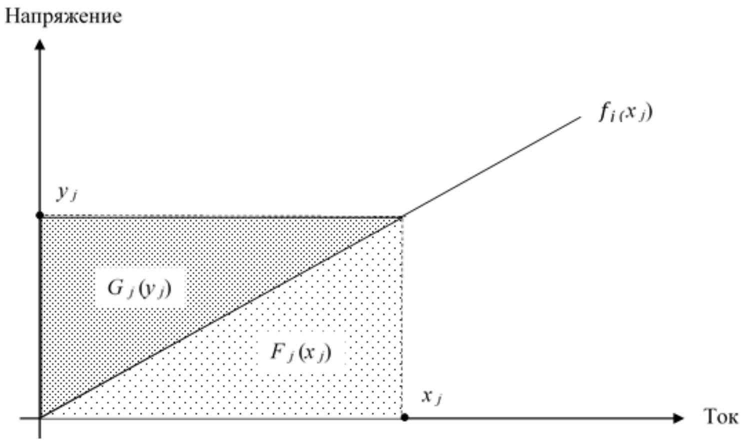

Рис. 1. Площадь прямоугольника $x_j \times y_j$ – потери мощности на ветви j: x_j – ток, y_j – напряжение, $tg\alpha = h_j$ – сопротивление. Треугольники потерь, зависящих от тока $F_j(x_j)$, от напряжения $G_j(y_j)$

На рис. 2 представлен случай, когда на данной ветви j численное значение тока и напряжения не связаны между собой законом Ома. В данном случае численное значение напряжения больше того значения, которое должно было быть для рассматриваемого значения тока по закону Ома. Как видим, сумма площадей треугольников $G_j(y_j)$ и $F_j(x_j)$ здесь больше, чем площадь прямоугольника со сторонами равными x_j и y_j. Превышение суммарных площадей двух треугольников составляет площадь выделенного в треугольнике $G_j(y_j)$ треугольника ABC.

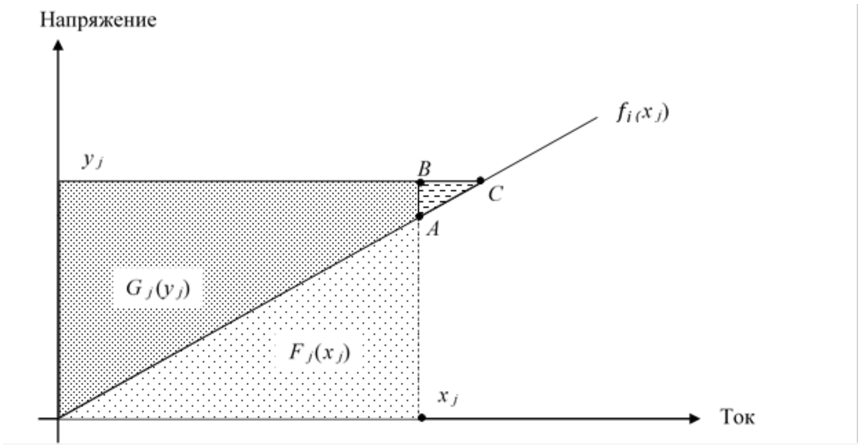

Рис. 2. Для несогласованных по закону Ома тока и напряжения на ветви j электрической цепи сумма площадей треугольников потерь, зависящих от тока $F_j(x_j)$ и от напряжения $G_j(y_j)$, превышает на площадь треугольника ABC произведение $x_j \times y_j$

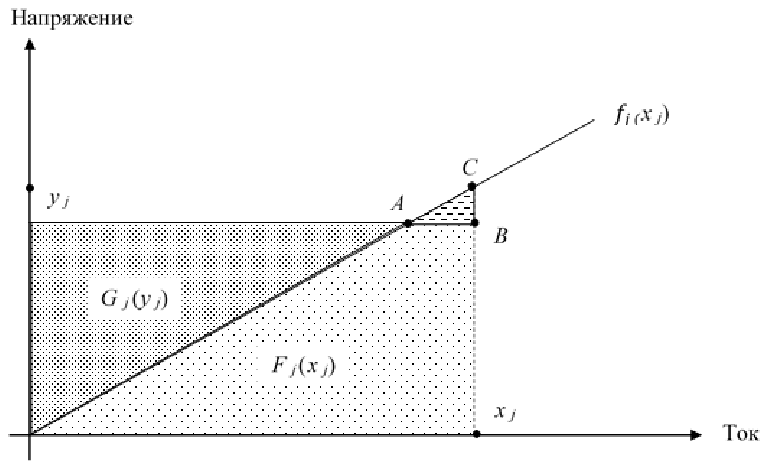

Рис. 3. Второй случай несогласованных по закону Ома тока и напряжения на ветви j. Величина напряжения y_j меньше, чем должна быть для данного значения тока x_j. Сумма площадей треугольников $F_j(x_j)$ и $G_j(y_j)$, превышает на площадь треугольника ABC произведение $x_j \times y_j$

Несложно убедится, что если имеет место другой, симметричный случай, когда величина тока превышает его значение, при котором для данного напряжения на дуге выполняется закон Ома, то сумма площадей двух треугольников $G_j(y_j)$ и $F_j(x_j)$ будет также превышать площадь прямоугольника со сторонами равными x_j и y_j. Эта ситуация представлена на рис. 3. Указанное превышение в данном случае равно площади треугольника ABC находящегося в треугольнике $F_j(x_j)$.

Во всех рассмотренных выше случаях ток и напряжение имели положительный знак. Эти рассуждения легко переносятся на ситуации, когда обе величины x_j и y_j отрицательные. То есть, когда направление тока и напряжения обратное тому, которое изначально выбрано для данной ветви за положительное направление. Это отражает условность в задании направлений по ветвям электрической цепи.

Если величины x_j и y_j имеют разные знаки (одна из этих величин положительная, а вторая отрицательная), то их произведение будет иметь отрицательное значение. В то время как численные значения обоих величин $G_j(y_j)$ и $F_j(x_j)$ будут положительными. Поэтому неравенство (25) будет выполнятся и в этой ситуации в строгом виде.

Пример

При изучении наук примеры не менее поучительны,
нежели правила.

И. Ньютон

Рассмотрим электрическую цепь, представленную на рис 4. Будем пользоваться в этом примере обозначениями, принятыми при описаниях электрических цепей в электротехнике и физике, что бы этот пример был боле понятен специалистам в электрических цепях. Для потенциала в узлах вместо обозначения u_i будем здесь использовать обозначение φ_i. Для тока и напряжения на ветвях вместо x_j и y_j используем обозначение I_j и U_j. Токи входящие в цепь и выходящие из нее будем по-прежнему представлять вектором b и его компонентами. Для Э.Д.С. на ветви j вместо c_j, будем использовать обозначение E_j.

У рассматриваемой цепи 4 узла и 6 ветвей. Номера узлов расположены внутри кружочков их обозначающих. На каждой ветви $j = 1, \ldots, 6$ в прямоугольниках находятся величины R_j, которые соответствуют заданным значениям электрических сопротивлений на этой ветви. Стрелки указывают направление тока принятое для данной ветви за положительное. На одной из ветвей, а именно на пятой имеется источник Э.Д.С., дающий приращение напряжение на величину E_5 в направлении выбранном для данной ветви за положительное. Заданы также величина входящего в первый узел извне тока b_1 и величина выхдящего из цепи через четвертый узел тока b_4. Второй и третий узлы пассивные $b_2 = b_3 = 0$.

Искомыми величинами являются потенциалы φ_i узлах $i = 1, \ldots, 4$, токи I_j и напряжения U_j на ветвях $j = 1, \ldots, 6$.

Наглядно видно, что эта цепь связная, из любого узла можно по ветвям и узлам цепи перейти в любой другой узел. Поэтому необходимым и достаточным условием для существования решения является равенство (24), которое в данном случае имеет вид:

$$b_1 + b_4 = 0.$$

Считаем, что

$$b_4 > 0,\ b_1 = -b_4 < 0. \tag{27}$$

Исходная задача оптимизации для данной цепи имеет вид:

$$0.5 \sum_{j=1}^{6} R_j (I_j)^2 - E_5 I_5 \to \min, \tag{28}$$

при ограничениях, выражающих первый закон Кирхгофа для первых трех узлов,

$$I_1 - I_2 - I_3 = b_1, \tag{29}$$

$$I_3 - I_5 - I_6 = 0, \tag{30}$$

$$I_2 - I_4 + I_5 = 0. \tag{31}$$

Балансовое уравнение входящих и выходящих токов для четвертого узла является следствием этих трех уравнений. Действительно, просуммировав левые и правые части равенств (29)–(31) и умножив обе части полученного равенства на –1 получим

$$I_1 - I_4 + I_6 = -b_1.$$

Учитывая, что согласно (27) $b_1 = -b_4$, получаем уравнение первого закона Кирхгофа для четвертого узла.

Отметим, что если первая составляющая целевой функции (28) это половина потерь мощности на сопротивление всей электрической цепи (потери на нагревание), то вторая составляющая выражает умноженную на –1 величину затрачиваемой Э.Д.С мощности на осуществляемый на пятой ветви прирост напряжения на величину E_5. Знак минус при второй составляющей означает, что затраты мощности на Э.Д.С. максимизируются. Полученное уточнение тепловой теоремы Максвелла можно сформулировать в такой форме: «***Электрический ток в цепи распределяется так, чтобы при выполнении первого закона Кирхгофа минимизировалась половина потерь мощности и одновременно максимизировались затраты мощности на Э.Д.С. в цепи***».

Есть еще одна составляющая требуемых внешних затрат мощности на данную электрическую цепь, о которой речь пойдет далее. В исходной задаче оптимизации в целевой функции не учитываются требуемые вне цепи мощности для создания входящих в цепь и выходящих из цепи токов.

Двойственная задача для рассматриваемой цепи имеет вид:

$$0.5\sum_{j=1}^{6}\left(\frac{1}{R_j}\right)(U_j)^2 + b_1\varphi_1 + b_4 0 \to \min,$$

при ограничениях

$$U_1 + 0 - \varphi_1 = 0, \tag{32}$$

$$U_2 + \varphi_3 - \varphi_1 = 0, \tag{33}$$

$$U_3 + \varphi_2 - \varphi_1 = 0, \tag{34}$$

$$U_4 + 0 + \varphi_3 = 0, \tag{35}$$

$$U_5 + \varphi_3 - \varphi_2 = E_5, \tag{36}$$

$$U_6 + 0 + \varphi_2 = 0. \tag{37}$$

Эти ограничения можно назвать балансами напряжений на ветвях. Их предлагается называть также вторым законом Кирхгофа применительно ко всем ветвям электрической цепи. В этой записи учитывается, что потенциал на четвертом узле зафиксирован на нулевом уровне (поскольку именно этот узел был исключен из балансовых уравнений в исходной задаче оптимизации), т. е. априори считаем, что $\varphi_4 = 0$. Ноль в целевой функции и нули в левой части равенств (32), (35), (37) представляют величину φ_4.

Заметим, что вторая составляющая в целевой функции может быть представлена как умноженную на минус 1 разность потенциалов на входе и выходе из электрической цепи ($\varphi_1 - \varphi_4$) умноженную на ток входящий и выходящий из цепи, равный величине b_4. Действительно, в силу (27)

$$b_1\varphi_1 + b_4 0 = -b_4\,(\varphi_1 - 0).$$

Это мощность, затрачиваемая извне на входящий в электрическую цепь и выходящий из нее ток.

Полученный новый двойственный вариант тепловой теоремы можно сформулировать в виде такого утверждения***. Потенциалы в узлах электрической цепи и напряжения по ветвям распределяются так, чтобы при выполнении второго закона Кирхгофа минимизировалась половина потерь мощности в цепи и одновременно максимизировались затраты мощности на ток поступающий извне и выходящий во вне цепи.***

Самосопряженная задача оптимизации. Объединяя исходную и двойственную задачи, получаем:

$$0.5\,[\sum_{j=1}^{6} R_j(I_j)^2 + \sum\nolimits_{j=1}^{6} (\frac{1}{R_j})(U_j)^2)] - [E_5 I_5 + b_4\varphi_1] \to \min, \qquad (38)$$

при ограничениях (29)–(31), (32)–(37) и условии $u_4 = 0$. Оптимальные значения φ_1, φ_2, φ_3 будут одновременно и множителями Лагранжа ограничений (29)–(31). Оптимальные значения I_j будут одновременно и множителями Лагранжа ограничений (32)–(37).

Первая составляющая целевой функции (38) является полными потерями мощности внутри электрической цепи на нагревание. Вторая составляющая этой целевой функции — полные затраты мощности извне на данную электрическую цепь взятые со знаком «минус». Для оптимального решения эти составляющие совпадают, целевая функция (38) становится равной нулю. Можно сформулировать такой вариант тепловой теоремы. ***Токи и напряжения на ветвях, потенциалы в узлах у электрической цепи при выполнении первого и второго законов Кирхгофа распределяются таким образом, чтобы одновременно минимизировать потери мощности в цепи и одновременно максимизировать все затраты мощности извне на***

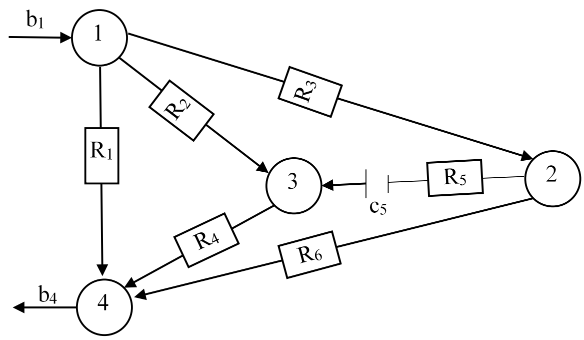

Рис. 4. Пример электрической цепи

данную электрическую цепь. Для оптимального решения достигается равенство затрат мощности извне и потерь мощности в электрической цепи.

Заключение

Материалы данной статьи иллюстрируют пользу теории оптимизации для совершенствования теории и методов расчета электрических цепей. На базе теории симметричной двойственности можно моделировать и более сложные, чем рассмотренные здесь электрические цепи с полупроводниками, с регуляторами напряжений и токов. Можно рассматривать неклассические цепи, в которых, например, заданными являются напряжения в некоторых узлах, а значения некоторых компонент вектора b являются искомыми величинами. Можно также рассматривать постановки в которых коэффициенты сопротивления h_j рассматриваются как величины зависящие от тока x_j. Известно, что с увеличением тока проводник нагревается. Если это металлический проводник, то при нагревании возрастает коэффициент сопротивления. У жидкого проводника, наоборот, при нагревании коэффициент сопротивления снижается. Эти постановки будут рассмотрены в одной из последующих статей.

Приведенное в качестве эпиграфа высказывание Фейнмана является на самом деле вопросом. Он в этой части своей лекции высказывает непонимание какими законами микромира обеспечивается выполнение тепловой теоремы Максвелла, используя ее исходную постановку [13, с. 94–118]. Может быть, введенные здесь уточненные формулировки тепловой теоремы будут способствовать лучшему пониманию правил распределений в микромире электрических токов и напряжений.

Когда создавалась теория электричества и магнетизма многие физики (в том числе Кирхгоф, Максвелл) пользовались аналогиями течений жидкостей. Интересно, что при создании теории гидравлических цепей [14] для решения практических задач водоснабжения, теплоснабжения, канализации и др. активно использовалась аналогия с электрическими цепями. Теория симметричной двойственности для гидравлических цепей, как показано в [10; 11; 13; 15], оказалась также очень полезной для совершенствования методов вычислений и применяемых моделей. Это будет рассмотрено в одной из последующих статей в данном журнале.

Еще одним приложением тепловой теоремы могут служить транспортные задачи, в том числе нелинейные. Эти задачи представляются в виде потоков товаров на графах транспортной сети. Вместо закона Ома или его аналога закона Дарси для гидравлических цепей в данном случае при выборе маршрутов и объемов транспортировки необходимо учитывать затраты на транспортировку по разным ветвям. Аналогами потенциалов в узлах служат узловые цены перевозимых товаров. При этом несколько изменяется подход к узловым двойственным оценкам. Если в электрической сети ток течет от узлов с более высоким потенциалом к узлам с более низким, а в гидравлических цепях среда перемещается от узлов с более высоким давлением к узлам с более низким, то в транспортировке экономических благ ситуация обратная. Товары перемещаются от узлов с более низкими ценами к узлам с более высокими узловыми ценами. Эту особенность рассмотрим боле подробно при рассмотрении линейных экономических задач и их обобщений.

Список использованной литературы

1. Максвелл Дж.К. Трактат об электричестве и магнитизме : в 2 т. / Дж.К. Максвелл. — Москва : Наука, 1989. — Т. 1. — 434 с.

2. Зоркальцев В.И. Начала оптимизации: закон Снелла и принцип Ферма / В.И. Зоркальцев // System Analysis & Mathematical Modeling. — 2022. — Т. 4, № 2 (11). — С. 81–99.

3. Зоркальцев В.И. Почему mv^2 пополам? И причем здесь электрические цепи? // Страна Знаний. — 2015. — № 1. — С. 14–20.

4. Деннис Дж.Б. Математическое программирование и электрические цепи / Дж.Б. Деннис. — Москва : Изд-во иностр. лит., 1961. — 215 с.

5. Голиков А.И. Новый метод решения систем линейных равенств и неравенств / А.И. Голиков, Ю.Г. Евтушенко. — EDN OOOBKJ // Доклады Академии наук. — 2001. — Т. 381, № 4. — С. 444–447.

6. Голиков А.И. Двойственный подход к решению систем линейных неравенств / А.И. Голиков, Ю.Г. Евтушенко // Методы оптимизации и их приложения : труды 12 Байкальской междунар. конф. — Иркутск, 2001. — С. 91–99.

7. Астафьев Н.Н. Некоторые элементарные преобразования двойственных задач линейного программирования / Н.Н. Астафьев // Современные методы оптимизации и их приложения к моделям энергетики : сб. науч. тр. — Новосибирск, 2003. — С. 46–55.

8. Еремин И.И. Теория линейной оптимизации / И.И. Еремин. — Екатеринбург, 1999. — 312 с.

9. Зоркальцев В.И. Симметричная двойственность. Приложения к моделям электрических и гидравлических цепей / В.И. Зоркальцев. — Иркутск, 2004. — 40 с.

10. Зоркальцев В.И. Симметричная двойственность в оптимизации и ее приложения / В.И. Зоркальцев // Известия Вузов. Математика. — 2006. — № 2. — С. 53–69.

11. Зоркальцев В.И. Действует ли принцип наименьшего действия в электрических и гидравлических цепях / В.И. Зоркальцев // Методы оптимизации и их приложения : труды 15 Байкальской междунар. школы-семинара. — Иркутск, 2011. — Т. 6. — С. 317–328.

12. Зоркальцев В.И. Системы линейных неравенств / В.И. Зоркальцев, М.А. Киселева. — Иркутск : ИГУ, 2008. — 127 с.

13. Фейнман Р. Фейнмановские лекции по физике / Р. Фейнман, Р. Лейтон, М. Сэндэ. — Москва : Мир, 1966. — Т. 6. — 343 с.

14. Меренков А.П. Теория гидравлических цепей / А.П. Меренков, В.Я. Хасилев. — Москва : Наука, 1988. — 244 с.

15. Епифанов С.П. Приложение теории двойственности к моделям потокораспределения : автореф. дис. … канд. физ.-мат. наук : 05.13.18 / С.П. Епифанов. — Иркутск, 2006. — 24 с.

References

1. Maxwell J.C. A *Treatise on Electricity and Magnetism*. Oxford, Clarendon Press, 1873. Vol. 1. 500 p. (Russ. ed.: Maxwell J.C. *A Treatise on Electricity and Magnetism*. Oxford, Clarendon Press. Moscow, Nauka Publ., 1989. Vol. 1. 434 p.).

2. Zorkaltsev V.I. *The Beginnings of Optimization: Snell's Law and Fermat's Principle. System Analysis & Mathematical Modeling*, 2022, vol. 4, no. 2, pp. 81–99. (In Russian).

3. Zorkaltsev V.I. Why is mv^2 halved? And what about electrical circuits? *Strana Znanii = Planet of Knowledge*, 2015, no. 1, pp. 14–20. (In Russian).

4. Dennis J.B. *Mathematical Porgramming and Electrical Networks*. New York, The Massachusetts inst. of technology and Wiley, 1959. 198 p. (Russ. ed.: Dennis J.B. *Mathematical Porgramming and Electrical Networks*. Moscow, Inostrannaya literatura Publ., 1961. 215 p.).

5. Golikov A.I., Evtushenko Yu.G. A New Method for Solving Systems of Linear Equalities and Inequalities. *Doklady Akademii nauk = Reports of the Academy of Sciences,* 2001, vol. 381, no. 4, pp. 444–447. (In Russian).

6. Golikov A.I., Evtushenko Yu.G. Dual approach to solving systems of linear inequalities. Optimization Methods and Their Applications. *Proceedings of the 12th Baikal International Conference.* Irkutsk, 2001, pp. 91–99. (In Russian).

7. Astafev N.N. Some elementary transformations of dual linear programming problems. Modern optimization methods and their applications to energy models. *Collected papers.* Novosibirsk, 2003, pp. 46–55. (In Russian).

8. Eremin I.I. *Theory of linear optimization*. Ekaterinburg, 1999. 312 p.

9. Zorkaltsev V.I. *Symmetric duality. Applications to Electric and Hydraulic Circuit Models*. Irkutsk, 2004. 40 p.

10. Zorkaltsev V.I. Symmetric Duality in Optimization and its Applications. *Izvestiya Vuzov. Matematika = Russian Mathematics,* 2006, no. 2, pp. 53–69. (In Russian).

11. Zorkaltsev V.I. Does the principle of least action work in electrical and hydraulic circuits. *Optimization Methods and Their Applications. Proceedings of the 15th Baikal International Seminar Schools*. Irkutsk, 2011. Vol. 6, pp. 317–328. (In Russian).

12. Zorkaltsev V.I., Kiseleva M.A. *Systems of linear inequalities*. Irkutsk State University Publ., 2008. 127 p.

13. Feynman R.P., Leigton R.B., Sands M. *The Feynman Lectures on Physics.* Wiley, 1964. 528 p. (Russ. ed.: Feynman R.P., Leigton R.B., Sands M. *The Feynman Lectures on Physics.* Moscow, Mir Publ., 1966. Vol. 6. 343 p.).

14. Merenkov A.P., Khasilev V.Ya. *Theory of hydraulic circuits.* Moscow, Nauka Publ., 1988. 244 p.

15. Epifanov S.P. *Application of Duality Theory to the Flow Distribution Models. Cand. Diss. Thesis*. Irkutsk, 2006. 24 p.

Информация об авторе

Зоркальцев Валерий Иванович — доктор технических наук, профессор, заведующий лабораторией математического моделирования, Байкальский государственный университет, г. Иркутск, Российская Федерация, e-mail: vizork@mail.ru.

Information about the Author

Valeriy I. Zorkaltsev — Doctor of Technical Sciences, Professor, Head of the Lab of Mathematical Modeling, Baikal State University, Irkutsk, Russian Federation, e-mail: vizork@mail.ru.

Для цитирования

Зоркальцев В.И. Уточнение и обобщения тепловой теоремы Максвелла / В.И. Зоркальцев. — DOI 10.17150/2713-1734.2022.4(4).317-342 // System Analysis & Mathematical Modeling. — 2022. — Т. 4, № 4. — С. 317–342.

For Citation

Zorkaltsev V.I. Refinement and Generalization of Maxwell's Thermal Theorem. *System Analysis & Mathematical Modeling*, 2022, vol. 4, no. 4, pp. 317–342. (In Russian). DOI: 10.17150/2713-1734.2022.4(4).317-342.