

Научная статья
УДК 519.218.28

А.В. Боровский

*Байкальский государственный университет,
г. Иркутск, Российская Федерация*

А.Л. Галкин

*Институт общей физики им. А.М. Прохорова РАН,
г. Москва, Российская Федерация*

Н.Н. Ильиных

*Государственное бюджетное учреждение здравоохранения
Иркутская область «Знак почета» областная клиническая больница,
г. Иркутск, Российская Федерация*

С.С. Козлова

*Байкальский государственный университет,
г. Иркутск, Российская Федерация*

Новые результаты эпидемических моделей на примере COVID-19

Аннотация. Рассмотрены новые результаты эпидемических моделей, применяемых для исследования эпидемии COVID-19. В интегро-дифференциальной модели предложен способ получения ядра для интегрального оператора. Из анализа статистики госпитализаций определена статистическая кривая для количества выздоровевших пациентов в зависимости от длительности лечения. Предложены гауссовская и лоренцевская (в физической терминологии) аппроксимации статистической кривой. Методом наименьших квадратов определены коэффициенты аппроксимаций. Лоренцевская аппроксимация как наилучшая использована для получения аналитического выражения для ядра интегрального оператора в интегро-дифференциальной модели. Предложено сдвинуть аппроксимирующую кривую на величину длительности скрытого инкубационного периода заболевания. Показано, что ядро интегрального оператора может быть определено с использованием неполных статистических данных.

Для дифференциальной модели эпидемии с источником инфекции продолжена реализация подхода, основанного на решении обратной задачи для определения источника и прямой задачи с найденным источником для сравнения со статистикой заболевания по городу Москве за 796 дней эпидемии. Указанный подход использован для изучения летальности эпидемии, получения параметрического графика, описывающего эпидемические волны и вычисления коэффициента воспроизводства вируса, позволяющего анализировать степень развития эпидемии и необходимость введения или ослабления санитарных норм.

Ключевые слова. Теория эпидемий, эпидемическая кинетика, ядро интегрального оператора для эпидемической кинетики COVID-19, обратная и прямая задачи в дифференциальной модели на примере Москвы, летальность эпидемии, коэффициент воспроизводства вируса, эпидемические волны.

Информация о статье. Дата поступления: 19 ноября 2022 г.

A.V. Borovsky

*Baikal State University,
Irkutsk, Russian Federation*

A.L. Galkin

*Prokhorov General Physics Institute
of the Russian Academy of Sciences,
Moscow, Russian Federation*

N.N. Ilinykh

*State Budgetary Healthcare Institution
Irkutsk Order "Badge of Honor" Regional Clinical Hospital,
Irkutsk, Russian Federation*

S.S. Kozlova

*Baikal State University,
Irkutsk, Russian Federation*

New Results of Epidemic Models on the Example of COVID-19

Abstract. The current research considered new results of epidemic models used to study the COVID-19 epidemic. In the integro-differential model, a method for obtaining a core for an integral operator is proposed. From the analysis of hospitalization statistics, a statistical curve was determined for the number of recovered patients depending on the duration of treatment.

Gaussian and Lorentzian (in physical terminology) approximations of the statistical curve are proposed. Approximation coefficients are determined by the least squares method. The Lorentz approximation as the best one is used to obtain an analytical expression for the core of the integral operator in the integro-differential model. It is proposed to shift the approximating curve by the duration of the latent incubation period of the disease. It is shown that the core of the integral operator can be determined using incomplete statistical data.

For the differential model of an epidemic with a source of infection, we continued to use an approach based on solving an inverse problem to determine the source and a direct problem with an identified source for comparison with disease statistics for the city of Moscow for 796 days of the epidemic. This approach was used to study the lethality of the epidemic, obtain a parametric graph describing epidemic waves and calculate the reproduction rate of the virus, which makes it possible to analyze the degree of development of the epidemic and the need to introduce or weaken sanitary standards.

Keywords. Theory of epidemics, epidemic kinetics, the core of the integral operator for the epidemic kinetics of COVID-19, inverse and direct problems in a differential model using the example of Moscow, epidemic lethality, virus reproduction rate, epidemic waves.

Article info. Received 19 November 2022.

Введение

Пандемия коронавирусной инфекции активизировала исследования эпидемических моделей. На раннем этапе эпидемии (2020 г.) население России испытало шок от летальности эпидемии и санитарных мер, введенных Российским эпидемическим надзором. Были отменены массовые мероприятия, закрыты увеселительные заведения и предприятия общественного питания,

ВУЗы и школы переведены на дистанционное обучение, старшему поколению было запрещено выходить из дома. В общественных местах все обязаны были носить медицинские маски. Были наложены ограничения на перемещения общественным транспортом. Был также введен ряд других мер.

Исследователи, которые занимались эпидемической теорией, прежде всего, обратились к известным моделям эпидемической кинетики SIR, SEIR, SEIRV [1; 2] и другим. Здесь речь идет о группах здоровых восприимчивых к инфекции членов популяции (S), заразившихся, но находящихся в скрытом инкубационном периоде (E), инфицированных, которые могут быть диагностированы (I), выздоровевших и приобретших иммунитет (R), вакцинированных (V), и других. Исследования эпидемий продолжаются уже более 100 лет [3–8]. Сразу выяснилось, что известные модели не соответствуют динамике эпидемии COVID-19. П.А. Головинским были предложены улучшения теории, связанные с наличием длительного инкубационного периода вирусной инфекции и перетекания заболевания между населенными пунктами с общественным транспортом [9]. С.А. Триггером с соавторами были рассмотрены дискретные модели развития эпидемии для больших регионов [10]. А.В. Боровским была рассмотрена аналитическая модель эпидемии с запаздыванием и стационарным источником инфекции [11]. А.В. Боровским и А.Л. Галкиным в [12] была предложена концепция квазистационарной эпидемии. Авторы изучали развитие первой волны эпидемии в городе Иркутске на основе нелинейной дифференциальной модели (ДМ) с запаздыванием и стационарным источником. Введение санитарных мер в модель приводило к подавлению эпидемической волны и переходу эпидемии примерно через 100 дней в квазистационарный режим протекания, который мог продолжаться неопределенно долго. В работе [13] тех же авторов был предложен подход, основанный на решении обратной задачи для ДМ с запаздыванием, из которой находился квазистационарный источник инфекции, и затем прямой задачи ДМ с запаздыванием, куда подставлялся найденный источник. Указанный подход в эпидемической теории будем называть «обратная и прямая задача в дифференциальной модели» или ОПЗДМ. Результаты решения достаточно точно совпали со статистикой по городу Москве за 539 дней эпидемии. В работе [14] авторы сформулировали интегро-дифференциальную модель (ИДМ), с внутренне присущим такой модели запаздыванием, и получили аналитическую формулу для скорости заражения граждан в поликлиниках.

Работы по моделированию эпидемий делятся на два типа. В первом [15] используется эпидемическая кинетика, применимая к населенному пункту или региону. В [16; 17] изучены модели

COVID-19 с 6 разновидностями популяции (SEIARD и SEIAHR). В [18] представлена модель с вакцинацией населения (SVEAIR).

Второй подход [19] описывает пространственное распространение эпидемии. Математическая модель эпидемии гриппа Барояна-Рвачева [20; 21] классифицируется как эпидемическая динамика, поскольку она может описывать волнообразное распространение эпидемии между городами при учете пассажиропотока (модель аналогична уравнениям гидродинамики). Все указанные модели [15–18] не принимают во внимание квазистационарный источник заражения, на необходимость учета которого впервые указано в [11; 12]. Только в этом случае можно построить адекватные эпидемические модели, описывающие продолжительное течение эпидемии и совпадающие с реальной статистикой.

Целью данной работы является рассмотрение важного аспекта построения ИДМ с запаздыванием, а именно определение математического выражения для ядра интегрального оператора.

Также представим сравнение со статистикой эпидемии COVID-19 по городу Москве за 796 дней расчетов в рамках подхода ОПЗДМ. Расчеты использованы для изучения летальности вируса, волн эпидемии и динамики коэффициента воспроизводства вируса

Основные уравнения ИДМ и ДМ с запаздыванием для эпидемии COVID-19

В модели эпидемической кинетики рассматривается развитие во времени эпидемии вирусной инфекции в населенном пункте, численность которого составляет N_0 . Популяция населенного пункта делится на 4 категории: N_1 восприимчивые члены популяции, т.е. не болевшие и не обладающие иммунитетом; N_2 инфицированные члены популяции; N_3 выздоровевшие (переболевшие и вакцинированные) члены популяции; N_4 члены популяции, попавшие в летальную группу за все время эпидемии.

Для замкнутой популяции выполняется закон сохранения численности населения

$$\sum_{i=1}^4 N_i = N_0. \quad (1)$$

Для выполнения (1) необходимо, чтобы естественная рождаемость была равна естественной смертности населения, а скорость выезда населения равна скорости приезда в населенный пункт. Например, численность города Иркутска сохраняется на постоянном уровне уже 30 лет. К тому же время развития эпидемии $T \sim 2\text{--}3$ года существенно меньше времени миграционных процес-

сов для населенных пунктов типа среднего города. Все указанные выше величины зависят от времени $N_i(t)$.

Для описания эпидемии COVID-19 удобно применить «переменные глобальной статистики»¹, которыми называют численность заразившихся $N_-(t)$, выздоровевших $N_+(t)$ и летальную группу $N_{\text{л}}(t)$ членов популяции с момента начала эпидемии. Величины $N_+(t)$ и $N_{\text{л}}(t)$ совпадают с $N_3(t)$ и $N_4(t)$ в модели эпидемической кинетики.

Переменная глобальной статистики заражений $N_-(t)$ связана с параметрами эпидемической кинетики следующим образом

$$N_1(t) + N_-(t) = N_0. \quad (2)$$

Отсюда получим

$$N_-(t) = N_2(t) + N_3(t) + N_4(t). \quad (3)$$

Видим, что количество инфицированных лиц может быть выражено через переменные глобальной статистики

$$N_2(t) = N_-(t) - N_+(t) - N_{\text{л}}(t). \quad (4)$$

В работах авторов [13; 14] была сформулирована интегро-дифференциальная модель эпидемической кинетики для населенного пункта с постоянно действующим источником заражения. В модели использовались переменные глобальной статистики $N_-(t)$, $N_+(t)$, $N_{\text{л}}(t)$

$$\frac{dN_-(t)}{dt} = k_- \left(\int_{t-\tau}^t \frac{dN_-(t')}{dt'} K(t-t') dt' + \gamma_1 \int_0^{t-\tau} \frac{dN_-(t')}{dt'} K(t-t') dt' \right) + A,$$

$$\frac{dN_+(t)}{dt} = k_+ N_2(t),$$

$$\frac{dN_{\text{л}}(t)}{dt} = k_{\text{л}} N_2(t - \tau),$$

$$N_1(t) + N_-(t) = N_0,$$

$$N_-(t) = N_2(t) + N_+(t) + N_{\text{л}}(t). \quad (5)$$

Если продифференцировать пятое уравнение, то можно получить следующее соотношение для эпидемических скоростей

¹ URL: https://datalens.yandex/7o7islq6ikh23?tab=X1&utm_source=cbregion&state=8f8de434378.

$$\frac{dN_2(t)}{dt} = \frac{dN_-(t)}{dt} - \frac{dN_+(t)}{dt} - \frac{dN_{\pi}(t)}{dt},$$

В системе уравнений (5) коэффициенты k_- , k_+ , k_{π} имеют размерность частоты, т.е. обратного времени, которое измеряется в сутках. Все данные в эпидемической статистике представлены в расчете за одни сутки. Численность различных категорий популяции размерности не имеет. Коэффициент γ_1 характеризует долю бессимптомно болеющих людей в общем количестве заразившихся. Время τ равно длительности скрытого инкубационного периода заболевания. Ядро интегрального оператора $K(t - t')$ описывает уменьшение количества заразившихся в день t' граждан по прошествии $t - t'$ дней, т.е. ко дню t . Количество заразившихся в конкретный день граждан со временем уменьшается из-за естественного выздоровления части граждан.

Величина A представляет собой скорость квазистационарных постоянно действующих источников заражения. Величина A может медленно изменяться. Однако время такого изменения существенно больше обратных частот, присутствующих в модели и времени скрытого инкубационного периода развития инфекции

$$T \gg k_-^{-1}, k_+^{-1}, k_{\pi}^{-1}, \tau. \quad (6)$$

Дальнейшая модификация системы уравнений (5) предполагает неизменность ядра интегрального оператора

$$K(t - t') = 1, \quad (7)$$

что позволяет перейти к следующей системе дифференциальных уравнений эпидемической кинетики с запаздыванием

$$\begin{aligned} \frac{dN_-(t)}{dt} &= k_- \left(N_-(t) - (1 - \gamma_1) N_-(t - \tau) \right) + A, \\ \frac{dN_2(t)}{dt} &= k_- \left(N_-(t) - (1 - \gamma_1) N_-(t - \tau) \right) - k_+ N_2(t) - k_{\pi} N_2(t - \tau) + A, \\ \frac{dN_+(t)}{dt} &= k_+ N_2(t), \\ \frac{dN_{\pi}(t)}{dt} &= k_{\pi} N_2(t - \tau), \\ N_1(t) + N_-(t) &= N_0 \\ N_-(t) &= N_2(t) + N_+(t) + N_{\pi}(t) \end{aligned} \quad (8)$$

Решения системы уравнений (8) для города Иркутска были получены в работах [11; 13].

Квазистационарный источник инфекции A обращается в ноль при наложении полного карантина на популяцию N_0 . В России в период эпидемии COVID-19 карантин не вводился. Граждане относительно свободно перемещались между населенными пунктами. Поэтому в каждом населенном пункте источник инфекции A был отличен от нуля.

Ниже рассмотрим подробнее способ получения аналитического выражения для ядра интегрального оператора $K(t)$ на основе статистических данных, любезно предоставленных Иркутской областной клинической больницей (ИОКБ).

Способ определения ядра интегрального оператора $K(t)$

Рассмотрим выборку из n_0 заболевших. Рассмотрим течение заболевания в днях. Пусть dn_+ число выздоровлений в день t . Тогда скорость выздоровления заболевших из выборки n_0 будет равна

$$\frac{dn_+}{dt} = f(t). \quad (9)$$

Получим тогда для количества выздоровевших людей выражение

$$dn_+ = f(t)dt \rightarrow n_+(t) = \int_0^t f(t')dt'.$$

Для количества оставшихся зараженных людей

$$n_2(t) = n_0 - n_+(t) = n_0 - \int_0^t f(t')dt' = n_0 \left\{ 1 - \int_0^t \frac{f(t')}{n_0} dt' \right\}.$$

Обозначим

$$n_2(t) = n_0 K(t) \rightarrow K(t) = 1 - \int_0^t \kappa(t')dt', \quad \kappa(t) = \frac{f(t)}{n_0}. \quad (10)$$

Функция $K(t)$ описывает уменьшение количества заболевших людей со временем. Интеграл нормирован на единицу

$$\int_0^\infty \kappa(t)dt = 1. \quad (11)$$

Функция $K(t)$ меняется от 1 до 0 при изменении t от 0 до ∞ . Функцию $\kappa(t)$ определим из анализа статистики госпитализаций с диагнозом COVID-19.

На рис.1 представлена статистика выписки пациентов по городу Иркутску за 2020–2021гг. в зависимости от времени госпитализации. По горизонтальной оси отложено количество дней госпитализации. По вертикальной оси число выписанных пациентов.

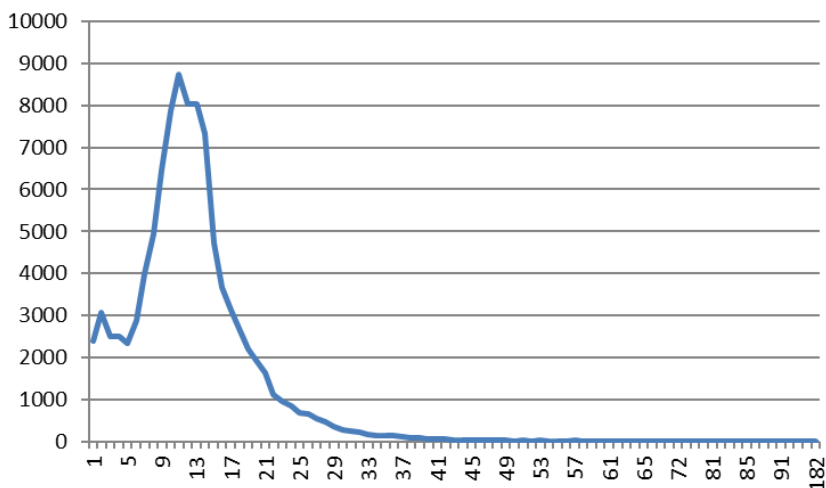


Рис. 1. Количество выздоровевших за определенный период

Рассмотрим различные варианты аппроксимации статистики на рис.1.

Аппроксимация гауссовой функцией

$$f(t) = b_1 \cdot \exp\left(-\left(\frac{t-c_1}{d_1}\right)^2\right). \quad (12)$$

Подбор коэффициентов b_1 , c_1 , d_1 , по методу наименьших квадратов дает следующие значения коэффициентов $b_1 = 7618,61$, $c_1 = 11,4359$, $d_1 = 6,7879$.

Набор коэффициентов одинаков для полной статистики и для усеченной до $t = 45$ дней. Далекое крыло статистики не влияет на аппроксимацию.

Статистика и ее аппроксимация функцией (12) представлены на рис.2.

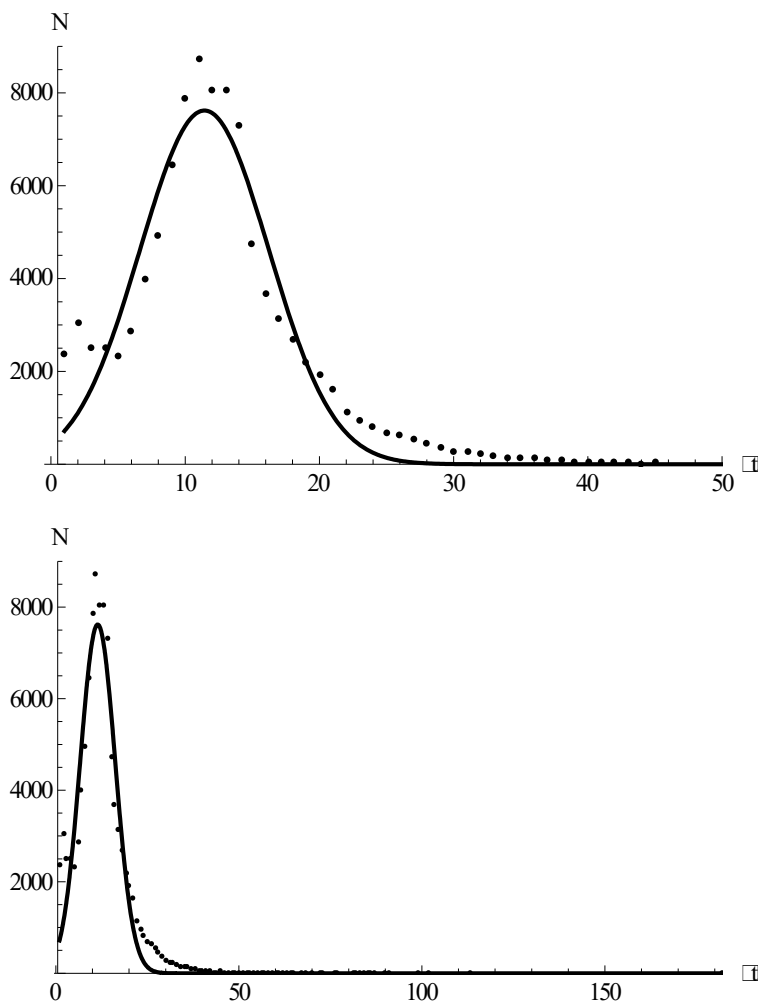


Рис. 2. Аппроксимация статистики гауссовой функцией (сплошная линия)

Аппроксимация лоренцевой функцией

$$f(t) = \frac{b_2}{1 + \left(\frac{t-c_2}{d_2}\right)^2}. \quad (13)$$

У математиков такую функцию называют распределением типа Коши. У физиков принято название лоренцева функция или распределение. В (13) коэффициент c_2 соответствует положению максимума функции на оси абсцисс, коэффициент d_2 равен полуширине распределения на полувывоте, коэффициент b_2 соответствует максимальному значению функции. Подбор ко-

эффицентов b_2 , c_2 , d_2 по методу наименьших квадратов приводит к следующим числовым значениям $b_2 = 8652,67$, $c_2 = 11.478$, $d_2 = 4,35778$. Сравнение лоренцевской аппроксимации со статистикой представлено на рис. 3.

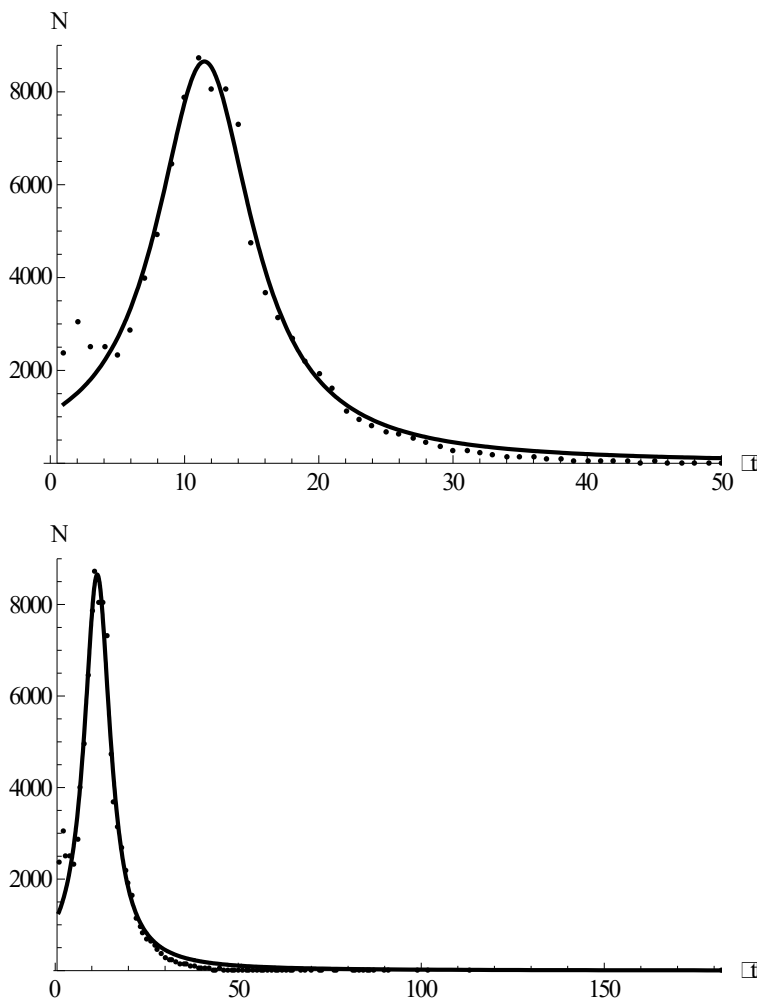


Рис. 3. Аппроксимация статистики госпитализаций лоренцевой функцией

Расчет средне-квадратичного уклонения (число отсчетов $j = 85$) проводится по формуле

$$\rho = \sqrt{\frac{1}{j} \sum_{i=1}^j (f_{\text{эксн}, i} - f_{\text{анпр}, i})^2}. \quad (14)$$

1. Для аппроксимации (12) $\rho = 488,176$ или по отношению к максимальному значению 8 728 составляет 0,0559 (5,6 %).

2. Для аппроксимации (13) $\rho = 286,524$ или по отношению к максимальному значению 8 728 составляет 0,0328 (3,3 %).

Таким образом, лоренцевская аппроксимация лучше приближает статистические данные.

Вычисление ядра интегрального оператора $K(t)$

Возьмем в качестве $f(t)$ лоренцевскую аппроксимацию (13). Тогда все интегралы в формуле (10) вычисляются в аналитическом виде. В результате получим следующее выражение для ядра

$$K(t) = \frac{1 - \frac{2}{\pi} \operatorname{arctg}\left(\frac{t-c}{d}\right)}{1 + \frac{2}{\pi} \operatorname{arctg}\left(\frac{c}{d}\right)}. \quad (15)$$

Отметим, что выражение (15) зависит только от двух параметров лоренцевского распределения c и d . График функции (15) представлен на рис. 4.

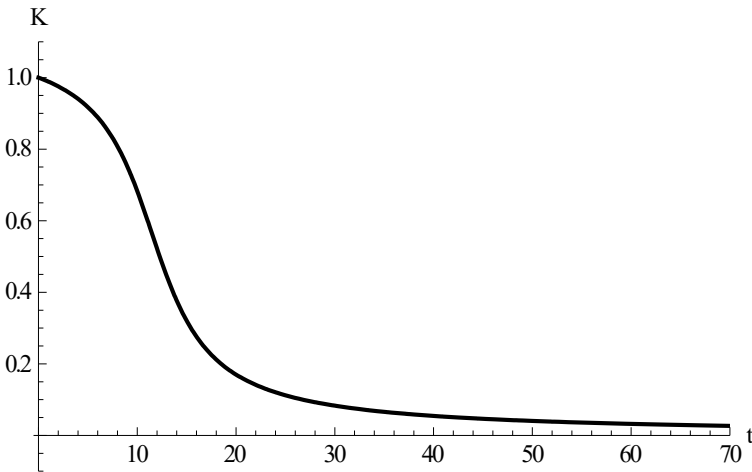


Рис. 4. График для ядра интегрального оператора в ИДМ для COVID-19

При рассмотрении лоренцевской аппроксимации на Рис.3 становится понятно, что аппроксимирующая кривая вместе со статистическими данными сдвинуты влево и у них обрезано левое крыло. В самом деле, вирусная инфекция обладает скрытым инкубационным периодом развития, когда болезнь еще не идентифицируется, а человек уже заражен. В этот период человек находится на работе или дома и уже распространяет вокруг себя инфекцию.

Сдвинуть вправо статистические данные нет возможности в силу их отсутствия. Однако, лоренцевскую аппроксимацию сдвинуть вправо не представляет труда. Для этого нужно увеличить число c на время инкубации вируса

$$c = 11,478 + \tau = 18,478.$$

График для функции $K(t)$ с указанным значением числа c (для вируса δ) представлен на рис. 5.

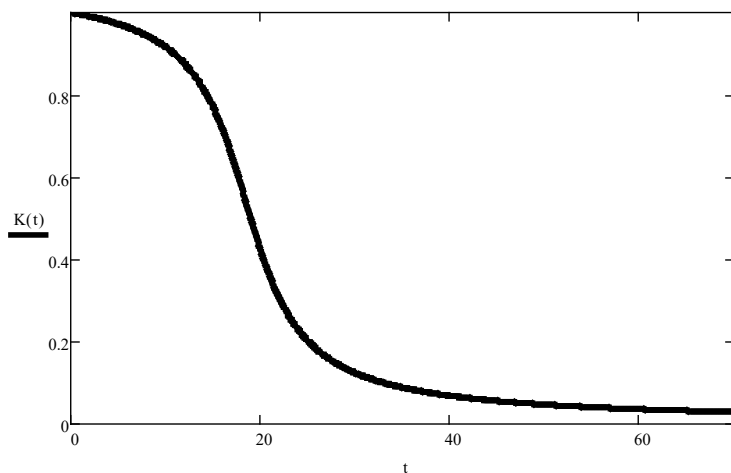


Рис. 5. График $K(t)$ для значения $c = 18,478$

Решение обратной и прямой задач эпидемической кинетики для города Москвы

Аналог системы дифференциальных уравнений (8) ранее [13] применялся для анализа статистики Москвы по заболеванию вирусной инфекцией COVID-19 за 539 дней с 1 марта 2020 г. Результаты обработки статистики Москвы за 796 дней (по 16.05.22) впервые публикуются ниже. Авторы сокращенно называют указанный подход — «обратная и прямая задачи дифференциального метода» или сокращенно — ОПЗДМ.

Основная проблема построения теории эпидемии COVID-19 заключается в отсутствии статистики по источнику квазистационарного заражения, который в моделях (5) и (8) обозначен буквой A . Не изучены виды и нет данных по величинам такого источника для городов РФ, в том числе для Москвы. Поэтому, авторы ранее предложили находить источник, решая обратную задачу для системы типа (8). Затем подставлять найденный источник в систему (8) и решать прямую задачу. Сделать выводы о видах квазистационарного заражения в рамках такого подхода невозможно. Но

величина источника может быть установлена достаточно точно. Это подтверждает сравнение со статистикой по городу Москве, представленное на рис. 6.

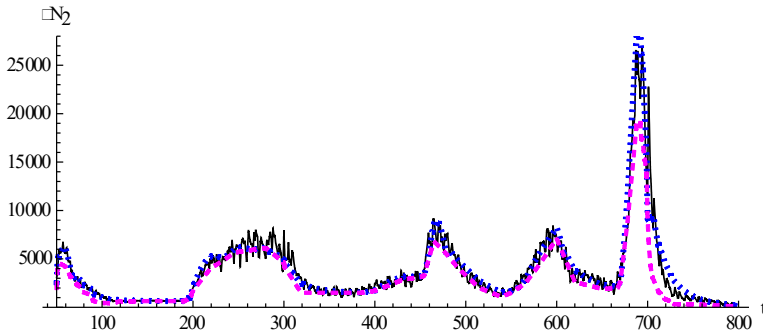


Рис. 6. Сравнение со статистикой заболевания COVID-19 по городу Москве за 796 дней эпидемии в рамках подхода ОПЗДМ

Черная кривая — статистика суточных приращений заболевших, красная кривая — источник, как решение обратной задачи, синяя кривая — решение прямой задачи с источником. Следует отметить, что с некоторого момента в статистику включались результаты отрицательных ПЦР-тестов, в случае их не подтверждения корректировка по числу выздоровевших не производилась.

Подход ОПЗДМ позволяет достаточно просто провести теоретический расчет летальности эпидемии, рис. 7. Для теоретической кривой $N_2(t)$, описывающей количество инфицированных в данный момент времени (сплошная кривая), для $k_{\text{л}} = 1/200$ рассчитан летальный исход $N_{\text{л}}(t)$ (точки). Вертикальная прямая $t = 539$ — граница предыдущего этапа обработки. Пунктирная кривая описывает интегральную летальность с момента начала эпидемии.

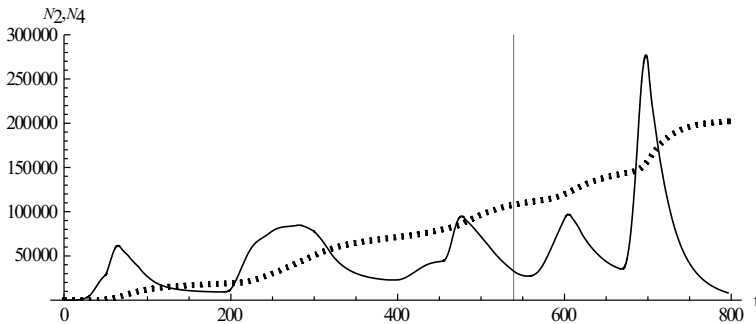


Рис. 7. Число инфицированных (сплошная кривая), Интегральная летальность (точки) по городу Москве за 796 дней эпидемии.

Если исходить из годовой смертности в Москве в докоронавирусное время в 120 000, то избыточная смертность составляет за 539 дней 107 890. Взяв пропорцию, найдем годовой прирост смертности из-за коронавирусной инфекции

$$107\,890 \cdot \frac{\frac{365}{539}}{120\,000} = 0,61$$

и за 796 дней

$$202\,100 \cdot \frac{\frac{365}{539}}{120\,000} = 0,77.$$

Здесь не проводилась медицинская верификация коэффициента k_d . Данные расчетов избыточной смертности могут корректироваться в сторону уменьшения путем дальнейшего уменьшения коэффициента $k_d = 1/200$, что практически не влияет на расчет числа инфицированных.

На рис. 8 представлен параметрический график зависимости числа инфицированных от величины источника (расчет, проведенный ранее — красный). Каждая очередная эпидемическая волна описывается витком спирали. По мере завершения очередной волны спираль приближается к 0.

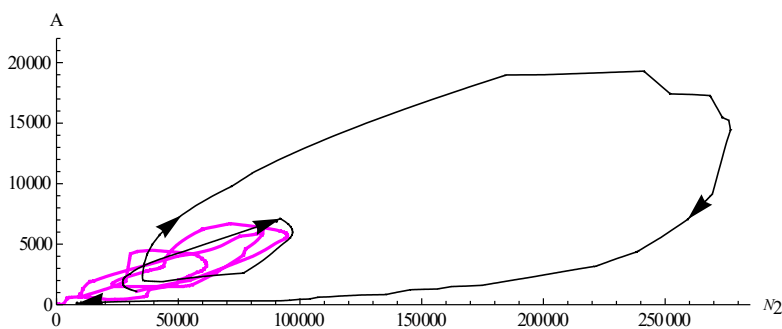


Рис. 8. Параметрический график числа инфицированных N_2 от величины источника A .

Процесс развития эпидемии часто описывается с использованием коэффициента воспроизводства вируса. Скорость распространения (размножения) вируса

$$R(t) = \frac{1}{N_2(t)} \frac{dN_-(t)}{dt} \tau_+ \quad (16)$$

это показатель, который определяет среднее число людей, инфицированных одним пациентом до его изоляции (или выздоровле-

ния). Он рассчитывается на основе данных о выявленных новых случаях за последние τ_+ дней. Коэффициент распространения вируса используется для принятия решений о переходе к следующему этапу снятия ограничений. Здесь $N_2(t)$ – количество инфицированных лиц, $\frac{dN_-(t)}{dt}$ — частота заражений в день t , τ_+ – время выздоровления инфицированного человека, а $N_-(t)$ – глобальный статистический параметр (количество случаев заражения с момента начала эпидемии).

На рис. 9 показан временной ход коэффициента воспроизводства вируса на основе статистических данных по городу Москве и значения $\tau_+ = 15$ дней.

График указывает на очевидное ослабление инфекции по сравнению с первой волной вируса, а также на переход эпидемии в квазистационарный режим, при котором $R(t) \cong 1$.

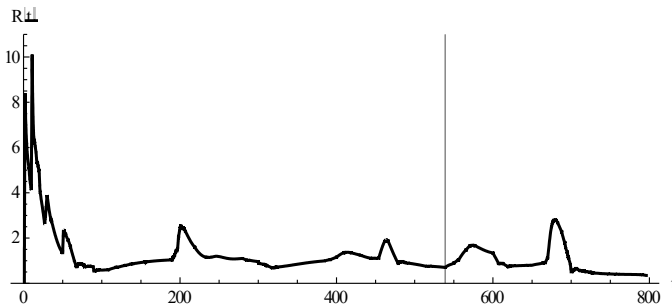


Рис. 9. Коэффициент воспроизводства вируса на примере Москвы за 796 дней эпидемии

Выводы

В работе рассмотрена интегро-дифференциальная модель (5) эпидемии COVID-19. Ранее для практического использования этой модели мешало отсутствие выражения или числовых данных для ядра интегрального оператора $K(t)$. Ядро заменялось единицей, а модель редуцировалась к системе дифференциальных уравнений эпидемической кинетики (8) с запаздыванием и квазистационарным источником. В данной работе проведено исследование, которое позволило получить выражение для ядра интегрального оператора. На основе данных по госпитализации больных с COVID-19 построена статистическая выборка количества выздоровевших в зависимости от длительности госпитализации, (рис.1). Выборка аппроксимирована гауссовой и лоренцевой функциями с тремя параметрами. При помощи метода наименьших квадратов найдены с высокой точностью значения параметров. Вычислены средне-квадратичные отклонения аппроксимирующих кривых от статистических данных. Показано, что лучшими характеристиками обладает

лоренцевская аппроксимация, для которой средне-квадратичное отклонение не превышает 3,3 %. Для гауссовской аппроксимации — 5,6 %. Лоренцевская аппроксимация использована для аналитического вычисления ядра интегрального оператора в ИДМ. Для ядра получено выражение (15), (см. рис. 4). Авторы предлагают также сдвинуть лоренцевскую аппроксимацию на величину длительности инкубационного периода заболевания, чтобы получить более реалистичное ядро интегрального оператора с момента начального заражения больных, (рис. 5). В самом деле, в больницы попадают пациенты, которые приобрели инфекцию не в день госпитализации, а несколькими днями раньше.

Интересно отметить, что выражение (15) для ядра интегрального оператора в модели ИДМ (5) зависит только от двух параметров лоренцевской аппроксимации c и d и не зависит от параметра b . Параметры c и d описывают положение максимума распределения и его полуширину на полувысоте. Параметр b описывает абсолютное значение максимума распределения. Независимость ядра от абсолютных значений лоренцевской аппроксимации означает, что выражение для ядра может быть получено с использованием неполной статистики госпитализаций. Достаточно использовать отдельную выборку, скажем данные для одной инфекционной больницы.

В работе представлены также численные расчеты эпидемической кривой для города Москвы за 796 дней эпидемии на основе подхода ОПЗДМ с запаздыванием и квазистационарным источником. Теоретическая кривая совпадает со статистическими данными с точностью 6–7 %. В данном подходе нельзя ничего сказать о видах квазистационарного источника заражения, однако его суммарная величина получается с достаточной точностью, что доказывают прямые расчеты с переменным квазистационарным источником. Модель позволяет получить теоретические кривые эпидемии в динамике, аппроксимирующие глобальную статистику с достаточной для практических применений точностью. Эти кривые могут быть использованы для изучения различных задач, связанных с протеканием эпидемии. В работе дополнительно изучена летальность эпидемии, эпидемические волны с использованием параметрических графиков, и динамика коэффициента воспроизводства вируса. Исследование впервые проведено в масштабе 796 дней для города Москвы.

Список использованной литературы

1. Бейли Н. Математика в биологии и медицине / Н. Бейли. — Москва : Мир, 1970. — 327 с.
2. Современное состояние проблемы математического моделирования и прогнозирования эпидемического процесса / А.А. Лопатин, В.А. Сафронов, А.С. Раздорский, Е.В. Куклев. — EDN MUMFNX // Проблемы особо опасных инфекций. — 2010. — № 3 (105). — С. 28–30.

3. Енько П.Д. О ходе эпидемий некоторых заразных болезней / П.Д. Енько // Врач. — 1889. — № 46–48.
4. Brownlee J. Statistical studies in immunity: the theory of an epidemic / J. Brownlee // Proceedings of the Royal Society of Edinburgh. — 1906. — Vol. 26, iss. 6. — P. 484–521.
5. Kermack W.O. A Contribution to the Mathematical Theory of Epidemics / W.O. Kermack, A.G. McKendrick // Proceedings of the Royal Society A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences. — 1927. — Vol. 115, iss. 772. — P. 700–721.
6. Bartlett M.S. Measles periodicity and community size / M.S. Bartlett // Journal of the Royal Statistical Society Series A (Statistics in Society). — 1957. — Vol. 120, iss. 1. — P. 48–60.
7. Stochastic Two-Agent Epidemic Simulation Models for a Community of Families / L. Elveback, E. Ackerman, L. Gatewood, J. Fox // American Journal of Epidemiology. — 1971. — Vol. 93, iss. 4. — P. 267–280.
8. Bartlett M.S. An Introduction to Stochastic Processes, with special reference to methods and applications / M.S. Bartlett. — 3rd ed. — Cambridge : Cambridge University Press, 1978. — 388 p.
9. Головинский П.А. Математическое моделирование распространения вирусов с длинной инкубационной фазой в тесном мире / П.А. Головинский. — DOI 10.17308/sait.2020.2/2909. — EDN HQGBNS // Вестник Воронежского государственного университета. Серия: Системный анализ и информационные технологии. — 2020. — № 2. — С. 5–14.
10. Trigger S.A. Equation for Epidemic Spread with the Quarantine Measures: Application to COVID-19 / S.A. Trigger, E.B. Czerniawski. — DOI 10.1088/1402-4896/abb2e2. — EDN ZCCLSW // Physica Scripta. — 2020. — Vol. 95, no. 10. — P. 105001.
11. Боровский А.В. Модель эпидемии с запаздыванием / А.В. Боровский. — EDN VNJAMC // System Analysis & Mathematical Modeling. — 2020. — Т. 2, № 4. — С. 53–63.
12. Боровский А.В. Модель квазистационарной эпидемической кинетики / А.В. Боровский, А.Л. Галкин. — DOI 10.17150/2500-2759.2021.31(2).221-229. — EDN YXYZYO // Известия Байкальского государственного университета. — 2021. — Т. 31, № 2. — С. 221–229.
13. Borovsky A.V. Model of Epidemic Kinetics with a Source on the Example of Moscow / A.V. Borovsky, A.L. Galkin. — DOI 10.1155/2022/6145242. — EDN PMKPWW // Computational and Mathematical Methods in Medicine. — 2022. — Vol. 2022. — С. 6145242.
14. Усовершенствованная математическая модель эпидемической кинетики и заражение SARS-CoV-2 в поликлиниках / А.В. Боровский, А.Л. Галкин, Н.Н. Ильиных, С.С. Козлова. — DOI 10.17150/2500-2759.2022.32(1).161-169. — EDN WPUTNM // Известия Байкальского государственного университета. — 2022. — Т. 32, № 1. — С. 161–169.
15. Li X.-P. A New Hepatitis B Model in Light of Asymptomatic Carriers and Vaccination Study through Atangana-Baleanu Derivative / X.-P. Li, N. Gul, M.A. Khan // Results in Physics. — 2021. — Vol. 29. — Article 104603.
16. A Dynamical Study of SARS-COV-2: a Study of Third Wave / X.-P. Li, Y. Wang, M. A. Khan [et al.] // Results in Physics. — 2021. — Vol. 29. — Article 104705.
17. A Vigorous Study of Fractional Order COVID-19 Model Via ABC Derivatives / X.-P. Li, H.A. Bayatti, A. Din, A. Zeb // Results in Physics. — 2021. — Vol. 29. — Article 104737.
18. Mathematical Modeling and Optimal Control of the COVID-19 Dynamics / Z.-H. Shen, Y.-M. Chu, M.A. Khan [et al.] // Results in Physics. — 2021. — Vol. 31. — Article 105028.

19. Arenas A. Modeling the Spatio-Temporal Epidemic Spreading of Covid-19 and the Impact of Mobility and Social Distancing Interventions / A. Arenas, W. Cota, J. Gómez-Gardeñes // *Physical Review X*. — 2020. — Vol. 10, no. 4. — Article 041055.

20. Бароян О.В. Моделирование и прогнозирование эпидемий гриппа для территории СССР / О.В. Бароян, Л.А. Рвачев, Ю.Г. Иванников. — Москва : Изд-во ин-та эпидемиологии и микробиологии им. Н.Ф. Гамалеи АМН СССР, 1977. — 546 с.

21. Боев Б.В. Прогнозно-аналитические модели эпидемий (оценка последствий техногенных аварий и природных катастроф) : лекция / Б.В. Боев. — URL: <https://armscontrol.ru/course/lectures05a/bvb050324.pdf>.

References

1. Beili N. *Math in biology and medicine*. Moscow, Mir Publ., 1970. 327 p.
2. Lopatin A.A., Safronov V.A., Razdorskii A.S., Kuklev E.V. Current State of Problem of Mathematical Modeling and Prognosis of the Epidemic Process. *Problemy osobo opasnykh infektsii = Problems of Particularly Dangerous Infections*, 2010, no. 3, pp. 28–30. (In Russian). EDN: MUMFHX.
3. Enko P.D. On the course of epidemics of certain contagious diseases. *Vrach= Doctor*, 1889, pp. 46–48. (In Russian).
4. Brownlee J. Statistical Studies in Immunity: the Theory of an Epidemic. *Proceedings of the Royal Society of Edinburgh*, 1906, vol. 26, iss. 6, pp. 484–521.
5. Kermack W.O., McKendrick A.G. A Contribution to the Mathematical Theory of Epidemics. *Proceedings of the Royal Society A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences*, 1927, vol. 115, iss. 772, pp. 700–721.
6. Bartlett M.S. Measles Periodicity and Community Size. *Journal of the Royal Statistical Society Series A (Statistics in Society)*, 1957, vol. 120, iss. 1, pp. 48–60.
7. Elveback L., Ackerman E., Gatewood L., Fox J. Stochastic Two-Agent Epidemic Simulation Models for a Community of Families. *American Journal of Epidemiology*, 1971, vol. 93, iss. 4, pp. 267–280.
8. Bartlett M.S. *An Introduction to Stochastic Processes, with special reference to methods and applications*. 3rd ed. Cambridge University Press, 1978. 388 p.
9. Golovinskii P.A. Mathematical Modelling of the Transmission of Viruses with a Long Incubation Period in a Small-World Network. *Vestnik Voronezhskogo gosudarstvennogo universiteta. Seriya: Sistemnyi analiz i informatsionnye tekhnologii = Proceedings of Voronezh State University. Series: Systems analysis and information technologies*, 2020, no. 2, pp. 5–14. (In Russian). EDN: HQGBNS. DOI: 10.17308/sait.2020.2/2909.
10. Trigger S.A., Czerniawski E.B. Equation for Epidemic Spread with the Quarantine Measures: Application to COVID-19. *Physica Scripta*, 2020, vol. 95, no. 10, pp. 105001. EDN: ZCCLSW. DOI: 10.1088/1402-4896/abb2e2.
11. Borovskii A.V. Lag Epidemic Model. *System Analysis & Mathematical Modeling*, 2020, vol. 2, no. 4, pp. 53–63. (In Russian). EDN: VNJAMC
12. Borovskii A.V., Galkin A.L. Model of Quasi-Stationary Epidemic Kinetics. *Izvestiya Baikalskogo gosudarstvennogo universiteta = Bulletin of Baikal State University*, 2021, v. 31, no. 2, pp. 221–229. (In Russian). EDN: YXYZYO. DOI: 10.17150/2500-2759.2021.31(2).221-229.
13. Borovsky A.V., Galkin A.L. Model of Epidemic Kinetics with a Source on the Example of Moscow. *Computational and Mathematical Methods in Medicine*, vol. 2022, pp. 6145242. EDN: PMKPWW. DOI: 10.1155/2022/6145242
14. Borovskii A.V., Galkin A.L., Il'inykh N.N., Kozlova S.S. Improved Mathematical Model of Epidemic Kinetics and SARS-COV-2 Infectoin in Outpatient Clinics. *Izvestiya Baikalskogo gosudarstvennogo universiteta = Bulletin of Baikal State University*, 2022, vol. 32, no. 1, pp. 161–169. (In Russian). EDN: WPUTNM. DOI: 10.17150/2500-2759.2022.32(1).161-169.

15. Li X.-P., Gul N., Khan M.A. A New Hepatitis B Model in Light of Asymptomatic Carriers and Vaccination Study through Atangana-Baleanu Derivative. *Results in Physics*, 2021, vol. 29, art. 104603.
16. Li X.-P., Wang Y., Khan M.A., Alshahrani M.Y., Muhammad T. A Dynamical Study of SARS-COV-2: a Study of Third Wave. *Results in Physics*, 2021, vol. 29, art. 104705.
17. Li X.-P., Bayatti H.A., Din A., Zeb A. A Vigorous Study of Fractional Order COVID-19 Model via ABC Derivatives. *Results in Physics*, 2021, vol. 29, art. 104737.
18. Shen Z.-H., Chu Y.-M., Khan M.A., Muhammad S., Al-Hartomy A., Higazy M. Mathematical Modeling and Optimal Control of the COVID-19 Dynamics. *Results in Physics*, 2021, vol. 31, art. 105028.
19. Arenas A., Cota W., Gómez-Gardeñes J. Modeling the Spatio-Temporal Epidemic Spreading of Covid-19 and the Impact of Mobility and Social Distancing Interventions. *Physical Review X*, 2020, vol. 10, no. 4, art. 041055.
20. Baroyan O.V., Rvachev L.A., Ivannikov Yu.G. *Modeling and forecasting of influenza epidemics for the territory of the USSR*. Moscow, Institut epidemiologii i mikrobiologii im. N.F. Gamalei AMN SSSR Publ., 1977. 546 p.
21. Boev B.V. *Predictive-analytical models of epidemics (assessment of the consequences of man-made accidents and natural disasters)*. Available at: <https://armscontrol.ru/course/lectures05a/bvb050324.pdf>.

Информация об авторах

Боровский Андрей Викторович — доктор физико-математических наук, профессор кафедры математических методов и цифровых технологий, Байкальский государственный университет, г. Иркутск, Российская Федерация, e-mail: andrei-borovskii@mail.ru.

Галкин Андрей Леонидович — доктор физико-математических наук, научный сотрудник, Институт общей физики им. А.М. Прохорова РАН, г. Москва, Российская Федерация, e-mail: galkin@kapella.gpi.ru.

Ильиных Николай Николаевич — заместитель главного врача, Государственное бюджетное учреждение здравоохранения Иркутская область «Знак почета» областная клиническая больница, г. Иркутск, Российская Федерация, e-mail: ilinykh_nn@iokb.ru.

Козлова Светлана Сергеевна — аспирант, кафедра математических методов и цифровых технологий, Байкальский государственный университет, г. Иркутск, Российская Федерация, e-mail: kozlova_ss@iokb.ru.

Information about the Authors

Andrey V. Borovsky — Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor of the Department of Mathematical Methods and Digital Technologies, Baikal State University, Irkutsk, Russian Federation, e-mail: andrei-borovskii@mail.ru.

Andrey L. Galkin — Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Scientific Researcher, Prokhorov General Physics Institute of the Russian Academy of Sciences, Moscow, Russian Federation, e-mail: galkin@kapella.gpi.ru.

Nikolay N. Il'inyh — Deputy Chief Physician, State Budgetary Healthcare Institution Irkutsk Order "Badge of Honor" Regional Clinical Hospital Irkutsk, Russian Federation, e-mail: ilinykh_nn@iokb.ru.

Svetlana S. Kozlova — PhD Student, Department of Mathematical Methods and Digital Technologies, Baikal State University, Irkutsk, Russian Federation, e-mail: kozlova_ss@iokb.ru.

Вклад авторов

Все авторы сделали эквивалентный вклад в подготовку публикации. Авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.

Contribution of the Authors

The authors contributed equally to this article. The authors declare no conflicts of interests.

Для цитирования

Новые результаты эпидемических моделей на примере COVID-19 / А.В. Боровский, А.Л. Галкин, Н.Н. Ильиных, С.С. Козлова. — DOI 10.17150/2713-1734.2022.4(4).255-274 // *System Analysis & Mathematical Modeling*. — 2022. — Т. 4, № 4. — С. 255–274.

For Citation

Borovsky A.V., Galkin A.L., Ilinykh N.N., Kozlova S.S. New Results of Epidemic Models on the Example of COVID-19. *System Analysis & Mathematical Modeling*, 2022, vol. 4, no. 4, pp. 255–274. (In Russian). DOI: 10.17150/2713-1734.2022.4(4).255-274.