

В.В. Братищенко
*Байкальский государственный университет,
г. Иркутск, Российская Федерация*

Семейство дискретных распределений с бесконечными моментами

Аннотация. В теории вероятностей выделяют законы распределения случайных величин, у которых моменты расходятся к бесконечности. Такие распределения важны для понимания особенностей распределений вероятностей, кроме этого, они находят практическое применение при исследовании процедур оценивания. Известны и хорошо изучены непрерывные распределения с бесконечными моментами. В работе предлагается семейство распределения дискретных случайных величин, у которых не существуют моменты, начиная с некоторого порядка. Распределения дополнены параметром, линейно влияющим на математическое ожидание. Предложен способ вычисления моментов распределения. Определена производящая функция закона распределения вероятностей.

Ключевые слова. Дискретная случайная величина, распределение вероятностей, числовые характеристики случайной величины, производящая функция распределения, случайная величина с бесконечными моментами.

Информация о статье. Дата поступления: 10 октября 2022 г.

Original article

V.V. Bratishchenko
*Baikal State University,
Irkutsk, Russian Federation*

A Family of Discrete Distributions with Infinite Moments

Abstract. In probability theory, distribution laws of random variables are distinguished, in which the moments diverge to infinity. Such distributions are important for understanding the features of probability distributions; in addition, they find practical application in the study of estimation procedures. Continuous distributions with infinite moments are known and well studied. The paper proposes a family of distributions of discrete random variables that does not have moments starting from a certain order. The distributions are supplemented with a parameter that linearly affects the mathematical expectation. A method for calculating distribution moments is proposed. The probability generating function is determined.

Keywords. Discrete random variable, probability distribution, numerical characteristics of a random variable, probability generating function, random variable with infinite moments.

Article info. Received 10 October, 2022 .

Распределения вероятностей случайных величин с бесконечными моментами старших порядков находят применение в математической статистике. Известны и широко применяются непрерывные случайные величины с такими свойствами. В данной работе предлагаются аналогичные дискретные случайные величины.

Количество различных распределений вероятностей бесконечно велико. Однако, в научных исследованиях применяется ограниченное число законов распределения вероятностей. Это связано с наиболее распространенными ситуациями, для описания которых и применяются известные распределения [1, с. 159–207]. Например, бернуллиевская схема испытаний, в которой исходами являются «успех» или «неудача», породила много дискретных распределений: биномиальное, геометрическое, Пуассона и другие [2, с. 163–185]. Схемы экспериментов являются основой для практического применения теории вероятностей и объясняют применение относительно небольшого количество распределений, применяемых для решения практических задач. Кроме этого, схемы экспериментов порождают связи между распределениями вероятностей¹.

Еще одним источником широко распространенных распределений являются устойчивые распределения — распределения, полученные как пределы преобразования последовательностей случайных величин — так называемая сходимости по вероятности. Именно таким является нормальное распределение, описывающее поведение средних значений большого количества наблюдений.

Примечательным является связь законов распределения вероятностей с числовыми характеристиками. Характеристические функции, с одной стороны, определяют ряд моментов, с другой — определяются таким рядом. Исключениями являются распределения с бесконечными значениями моментов. Оценки моментов таких распределений не обладают статистической устойчивостью.

В теории вероятностей рассматривается ряд непрерывных распределений с бесконечными математическими ожиданиями или моментами более высоких порядков [1]. Одним из самых известных таких распределений является распределение Коши с плотностью

$$f(x) = \frac{1}{\pi\gamma \left(1 + \left(\frac{x-x_0}{\gamma}\right)^2\right)}.$$

Другим примером может служить распределение Стюдента с плотностью

$$f(x) = \frac{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}{\sqrt{n\pi}\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)\left(1 + \frac{x^2}{n}\right)^{\frac{n+1}{2}}}.$$

¹ Univariate Distribution Relationships. URL: <http://www.math.wm.edu/~l-cemis/chart/UDR/UDR.html>.

У распределения Стьюдента с параметром n отсутствуют моменты порядка $k \geq n$. Аналогичным свойством обладает распределение Парето

$$f(x) = \frac{nc^{n+1}}{x^n} x \geq c,$$

у которого отсутствуют моменты порядка $k \geq n$.

Можно предложить распределение дискретной случайной величины аналогичное распределению Парето на основе дзета-функции Римана

$$\zeta(s) = \frac{1}{1^s} + \frac{1}{2^s} + \frac{1}{3^s} + \dots$$

определяя вероятности случайной величины через компоненты суммы

$$P\{Y_n = i\} = \frac{1}{\zeta(n)i^n}, i = 1, 2, \dots, n = 2, 3, \dots$$

Данное распределение часто называют дзета-распределением². Начальные моменты

$$\alpha_k[Y_n] = M[Y_n^k] = \frac{1}{\zeta(n)} \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{i^{n-k}} = \frac{\zeta(n-k)}{\zeta(n)}, k \leq n-2$$

не существуют при $k > n-2$.

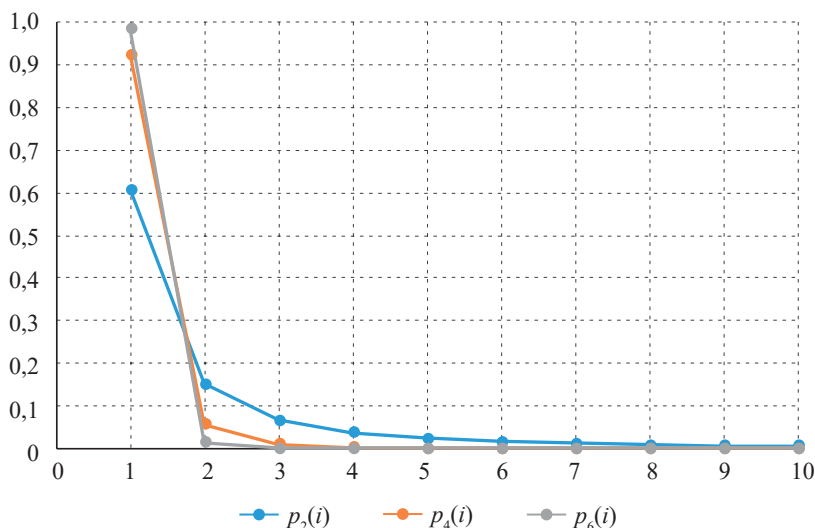


Рис. 1. Распределения вероятностей случайных величин Y_2, Y_4, Y_6

² Дзета-распределение - Zeta distribution Википедия site:wiki5.ru. URL: https://wiki5.ru/wiki/Zeta_distribution.

В данной работе предлагается еще одно семейство дискретных распределений, у которых конечными являются только несколько начальных моментов.

Рассмотрим телескопический ряд³

$$\frac{1}{i(i+1)\dots(i+k)}, i=1, 2, \dots, k \geq 1$$

со следующей суммой элементов

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{i(i+1)\dots(i+k)} &= \frac{1}{k} \sum_{i=1}^{\infty} \left(\frac{1}{i(i+1)\dots(i+k-1)} - \frac{1}{(i+1)\dots(i+k)} \right) = \\ &= \frac{1}{k \times k!}. \end{aligned}$$

На основании такого ряда можно построить распределение вероятностей

$$P\{X_k = i\} = \frac{k \times k!}{i(i+1)\dots(i+k)} = k \times k! \times \frac{(i-1)!}{(i+k)!}, i=1, 2, \dots, k \geq 1$$

случайной величины X_k . Распределения вероятностей для некоторых значений k представлены на рис. 2. Функцию распределения

$$F_k(x) = P\{X_k < x\}$$

для целочисленных значений аргумента можно рассчитать, представляя вероятности в виде разностей

$$\begin{aligned} F_k(m) &= 1 - P\{X_k \geq m\} = 1 - \sum_{i=m}^{\infty} \frac{k \times k!}{i(i+1)\dots(i+k)} = \\ &= 1 - \frac{k!}{m(m+1)\dots(m+k-1)}, m=1, 2, \dots \end{aligned}$$

Математическое ожидание X_k

$$\begin{aligned} M[X_k] &= \sum_{i=1}^{\infty} \frac{i \times k \times k!}{i(i+1)\dots(i+k)} = k \times k! \left(\left(\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{i \dots (i+k-1)} \right) - \frac{1}{k!} \right) = \\ &= k \times k! \left(\frac{1}{(k-1) \times (k-1)!} - \frac{1}{k!} \right) = \frac{k}{k-1}, k > 1 \end{aligned}$$

³ Телескопический ряд. URL: https://ru.wikipedia.org/wiki/Телескопический_ряд.

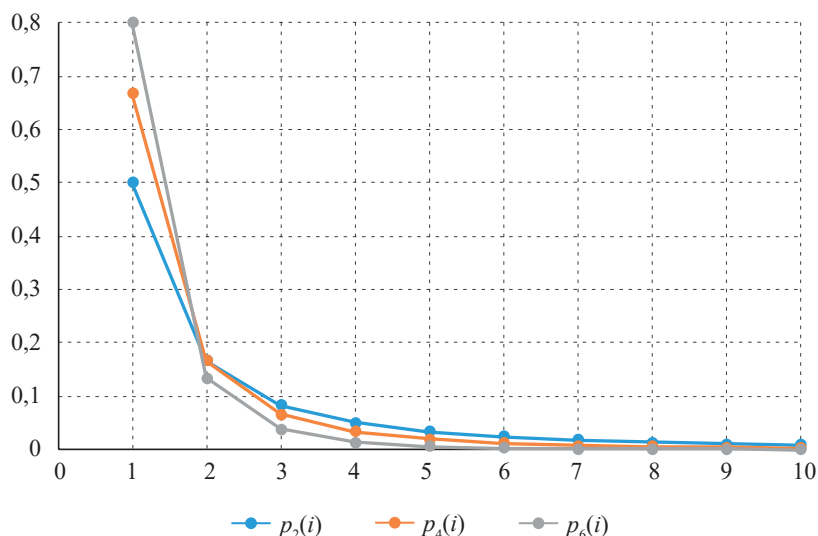


Рис. 2. Распределения вероятностей случайных величин X_1, X_2, X_4

не определено для случайной величины X_1 , которая вообще не имеет конечных начальных моментов.

Вид распределения вероятностей позволяет найти специальные числовые характеристики

$$f_n[X_k] = M[X_k(X_k + 1) \dots (X_k + n - 1)] = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{i(i+1) \dots (i+n-1)k \times k!}{i(i+1) \dots (i+k)} = \frac{k \times n!}{k-n},$$

которые расходятся к бесконечности при $n \geq k$. Начальные моменты

$$\alpha_1[X_k] = f_1[X_k],$$

$$\alpha_2[X_k] = f_2[X_k] - f_1[X_k],$$

$$\alpha_3[X_k] = f_3[X_k] - 3f_2[X_k] - f_1[X_k],$$

также расходятся к бесконечности при $n \geq k$.

Аналогично ведут себя центральные моменты. В частности, дисперсия

$$D[X_k] = f_2[X_k] - f_1[X_k]^2 = \frac{k^2}{(k-2)(k-1)^2}$$

конечна при $k \geq 3$.

Производящую функцию вероятностей распределения X_k можно определить на основе рекуррентного соотношения

$$\begin{aligned}
 v_k(s) &= M[s^{X_k}] = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{k \times k!}{i(i+1)\dots(i+k)} s^i = \\
 &= k! \sum_{i=1}^{\infty} s^i \left(\frac{1}{i(i+1)\dots(i+k-1)} - \frac{1}{(i+1)\dots(i+k)} \right) = \\
 &= \frac{k}{k-1} \frac{s-1}{s} v_{k-1}(s) + 1.
 \end{aligned}$$

Его применение дает следующий результат

$$v_k(s) = k \left(\frac{s-1}{s} \right)^{k-1} v_1(s) + \sum_{j=0}^{k-2} \frac{k}{k-j} \left(\frac{s-1}{s} \right)^j.$$

Для вычисления производящей функции распределения X_1

$$v_1(s) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{i(i+1)} s^i$$

рассмотрим функцию

$$f = v_1(s) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{i(i+1)} s^{i+1}, \quad f' = \sum_{i=1}^{\infty} s^{i-1} = \frac{1}{1-s}.$$

В результате интегрирования получаем

$$f = (1-s) \ln(1-s) + s$$

$$v_1(s) = \frac{1-s}{s} \ln(1-s) + 1$$

Окончательно получаем

$$v_k(s) = -k \left(\frac{s-1}{s} \right)^k \ln(1-s) + \sum_{j=0}^{k-1} \frac{k}{k-j} \left(\frac{s-1}{s} \right)^j$$

Можно ввести параметры в телескопический ряд, если вместо натуральных чисел использовать компоненты арифметической прогрессии $a + q, a + 2q, a + 3q, \dots, a + iq, \dots$. Вероятности

$$\begin{aligned}
 P\{X_k(b) = i\} &= \frac{kq(a+q)(a+2q)\dots(a+kq)}{(a+iq)(a+(i+1)q)\dots(a+(i+k)q)} = \\
 &= \frac{k(b+1)(b+2)\dots(b+k)}{(b+i)(b+i+1)\dots(b+i+k)}, \quad b = \frac{a}{q} \geq 0, \quad i = 1, 2, \dots, k = 1, 2, \dots
 \end{aligned}$$

в этом случае будут зависеть от одного параметра b . Графики таких распределений для некоторых значений параметров приведены на рис. 3. Графики демонстрируют, что увеличение b делает распределение более пологим.

Для поиска моментов используем соотношение

$$\begin{aligned} M[(X_k(b) + b)(X_k(b) + b + 1) \dots (X_k(b) + b + n - 1)] &= \\ &= \left(\sum_{i=1}^{\infty} \frac{k(b+1)(b+2) \dots (b+k)}{(b+i+n)(b+i+n+1) \dots (b+i+k)} \right) = \\ &= \frac{k(b+1)(b+2) \dots (b+n)}{k-n}, \quad k > n, \end{aligned}$$

используя которое можно определить математическое ожидание $X_k(b)$

$$M[X_k(b)] = \frac{k+b}{k-1}, \quad k > 1,$$

которое будет линейно зависеть от параметра b , и дисперсию

$$D[X_k(b)] = \frac{k(b+1)(b+k)}{(k-2)(k-1)^2}, \quad k > 2.$$

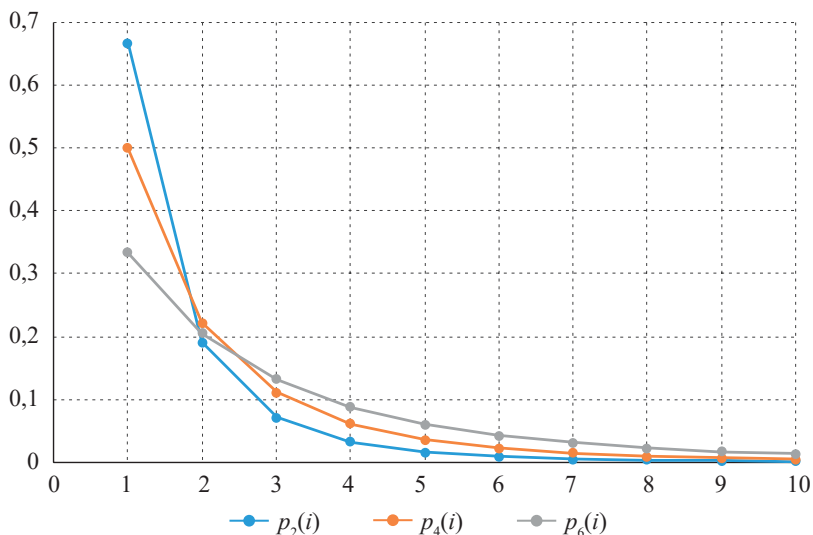


Рис. 3. Распределения вероятностей случайных величин $X_4(b)$ с параметрами $b = 1, b = 3, b = 7$.

Предложенное семейство случайных величин может найти применение для исследования статистических методов оценивания.

Список использованной литературы

1. Айвазян С.А. Прикладная статистика: Основы моделирования и первичная обработка данных / С.А. Айвазян, И.С. Енюков, Л.Д. Мешалкин. — Москва : Финансы и статистика, 1983. — 471 с.
2. Феллер В. Введение в теорию вероятностей и ее приложения : в 2 т. / В. Феллер. — Москва : Мир, 1984. — Т. 1. — 528 с.

References

1. Aivazyan S.A., Enyukov I.S., Meshalkin L.D. *Applied Statistics: Fundamentals of Modeling and Primary Data Processing*. Moscow, Finansy i statistika Publ., 1983. 471 p.
2. Feller W. *An Introduction to Probability Theory and its Applications*. New York, 1957. Vol. 1. 488 p. (Russ. ed.: Feller W. *An Introduction to Probability Theory and its Applications*. Moscow, Mir Publ., 1984. Vol. 1. 528 p.).

Информация об авторе

Братищенко Владимир Владимирович — кандидат физико-математических наук, доцент, кафедра математических методов и цифровых технологий, Байкальский государственный университет, г. Иркутск, Российская Федерация, e-mail: vvb@bgu.ru.

Information about the Author

Vladimir V. Bratishenko — PhD in Physical and Mathematical Sciences, Associate Professor, Department of Mathematical Methods and Digital Technologies, Baikal State University, Irkutsk, Russian Federation, e-mail: vvb@bgu.ru.

Для цитирования

Братищенко В.В. Семейство дискретных распределений с бесконечными моментами / В.В. Братищенко. — DOI 10.17150/2713-1734.2022.4(3).200-207 // System Analysis & Mathematical Modeling. — 2022. — Т. 4, № 3. — С. 200–207.

For Citation

Bratishenko V.V. A Family of Discrete Distributions with Infinite Moments. *System Analysis & Mathematical Modeling*, 2022, vol. 4, no. 3, pp. 200–207. (In Russian). DOI: 10.17150/2713-1734.2022.4(3).200-207.