Научная статья
УДК 519.6

В.И. Зоркальцев
*Байкальский государственный университет,
г. Иркутск, Российская Федерация*

Начала оптимизации: закон Снелла и принцип Ферма

Аннотация. Дается краткая характеристика основных понятий теории оптимизации, истории ее формирования. Рассматривается принцип наименьшего времени Ферма, предложенный для объяснения экспериментально установленного закона преломления света Снелла. Этот пример может рассматриваться как начало формирования особой научной дисциплины оптимизации. Основная цель статьи показать важность сочетания в научном познании трех составляющих: экспериментов, смелых гипотез и математических построений.

Ключевые слова. Оптимизация, закон преломления света, принцип наименьшего времени Ферма.

Информация о статье. Дата поступления: 2 сентября 2022 г.

Original article

V.I. Zorkaltsev
*Baikal State University,
Irkutsk, Russian Federation*

The Beginnings of Optimization: Snell's Law and Fermat's Principle

Abstract. The study provides a brief description of the basic concepts of the theory and its history. We considered Fermat's principle of least time, proposed to substantiate Snell's experimentally established law of refraction of light. This example can be applied as the beginning of the formation of any scientific discipline. The main purpose is to show the benefits of applying three components: experiments, bold hypotheses and mathematical models.

Keywords. Optimization, law of light refraction, Fermat's principle of least time.

Article info. Received 2 September 2022.

Введение

Оптимизация — это выбор из многих вариантов наилучшего. Проблемы выбора часто возникают в нашей жизни. Какие продукты и сколько купить в магазине? По какой дороге пойти? Где провести ближайшие выходные? Обычно такие проблемы мы решаем интуитивно. В иных ситуациях есть смысл, и даже необходимость проблемы наилучшего выбора формулировать в виде математических моделей. Это целесообразно делать при решении задач создания и управления функционированием сложных дорогостоящих объектов, установок и систем.

DOI: 10.17150/2713-1734.2022.4(2).81-99

При построении математических моделей мы должны зафиксировать *состав рассматриваемых переменных*, их взаимосвязи. Необходимо определить *множество допустимых вариантов* — наборов значений переменных, которые мы считаем возможными решениями.

Иногда это делается простым перечислением вариантов. Часто более уместным является иной путь — введение *ограничений задачи* в виде математически строгих требований к переменным. В таком случае допустимым решением будет такой набор переменных, который удовлетворяет всем введенным ограничениям.

Наконец, необходимо строго определить критерий, по которому следует выбирать лучший вариант из множества допустимых. Он называется *критерием оптимизации*. Иногда в этих целях используется каким-то образом заданное *отношение предпочтения*, которое для любых двух допустимых вариантов решения должно четко определять, какой из этих вариантов лучше другого, либо должно фиксировать их равноценность.

Часто в качестве критерия оптимизации используется *целевая функция*, ставящая в соответствие каждому допустимому варианту вещественное число. При этом возможны *два способа формулировки задачи выбора — на максимизацию или минимизацию целевой функции*.

В первом случае в качестве оптимального (наилучшего) выбирается такое допустимое решение, при котором целевая функция принимает наибольшее (максимальное) значение по сравнению с ее значениями при других допустимых вариантах. В этом случае среди любых двух допустимых вариантов лучшим будет тот, у которого значение целевой функции больше. Классический пример — задачи выбора вариантов развития и функционирования предприятия, исходя из максимизации ожидаемой прибыли — разницы между выручкой от реализации продукции и затратами на ее производство.

Альтернативная постановка — минимизация целевой функции. В этом случае из двух вариантов будет лучшим тот, у которого значение целевой функции меньше. Всегда можно перейти от задачи максимизации к задаче минимизации. И, наоборот, — от задачи минимизации к задаче максимизации. Для таких переходов достаточно умножить исходную целевую функцию на минус единицу. Так, вместо задачи максимизации прибыли можно рассматривать задачу минимизации ущерба, под которым понимается разница между затратами на производство и выручкой от реализации продукции.

Задачи оптимизации делятся на два класса. Один из них составляют задачи *оптимального управления*, роль переменных в которых выполняют функции. В качестве целевых функций и функций в ограничениях используются так называемые функционалы — функции от функций (часто среди аргументов этих функций используется параметр времени). Моделями оптимального управления описываются, например, процессы функционирования металлургических или химических установок, летательных аппаратов.

Второй класс — *задачи математического программирования*. В этих задачах рассматривается конечное число вещественных (иногда комплексных) переменных. Поэтому задачи математического программирования называют так же *задачами конечномерной оптимизации*.

О терминах. «Математическое программирование» активно развивалось после II-ой Мировой войны в рамках нового научного направления *«Исследование операций»*. Это направление возникло в результате переориентации математиков, занимавшихся решениям военных задач, на экономические задачи. Чем и вызвана такая военизированная терминология. В оптимизации можно выделить две составляющие.

1. *Теория оптимизации* — изучение свойств разных типов задач оптимизации, в том числе определение правил для идентификации (доказательного выявления) оптимальных решений.

Не всегда можно перебрать все допустимые решения, их может быть бесконечно много. В этих условиях необходимы надежные способы для констатации того, что полученное решение является оптимальным или близко (в каком-то смысле) к оптимальному. Необходимы также надежные критерии для выявления случаев отсутствия решения. Такого сорта проблемами и занимается теория оптимизации.

2. *Алгоритмы оптимизации* — способы нахождения оптимального или близкого к оптимальному решения. Каждый оригинальный алгоритм оптимизации обычно является результатом некоторого изобретения, вызванного новым взглядом на задачу. Поэтому алгоритм — не только последовательность вычислительных операций, но и набор идей, лежащих в его основе.

Происхождение задач оптимизации. Можно выделить два основных источника, которые стали и двумя временными этапами в постановке и исследовании задач оптимизации.

1. *Принцип наименьшего действия в физике*. Он активно развивался в XVII–XIX вв. Основоположником можно считать Пьера Ферма. А именно — данное им объяснение закона преломления света Снелла.

2. *Рациональный экономический выбор и выбор в конструировании и функционировании технических систем*. Этот аспект экономической науки активно начал развиваться в XIX в. в качестве *теоретического объяснения* поведения отдельных экономи-

ческих субъектов — предприятий, людей, организаций. В XX в. теория и методы оптимизации стали активно развиваться и использоваться *для решения практических задач* — организации перевозок, строительства, оптимального функционирования и развития промышленных и сельскохозяйственных предприятий. Основоположником практического широкого использования моделей оптимизации в экономической деятельности является Л.В.Канторович, создатель особого класса задач линейной оптимизации, который принято называть *линейным программированием*. На русском языке написано несколько хороших учебников по теории и методам оптимизации в том числе книги [1; 2]. Есть интересные переводные монографии, например, [3; 4]. Эти, как и друге книги по оптимизации написаны для математиков, имеющих углубленное образование в математическом анализе, линейной алгебре. Существует потребность в изложении основ оптимизации, решаемых с помощью этой дисциплины задач для широкого круга лиц в том числе для студентов не математических специальностей.

Закон преломления света и гипотезы Ферма

«… так как здание всего мира совершенно и возведено премудрым творцом, то в мире не происходит ничего, в чем бы не был виден смысл какого-нибудь максимума или минимума…».

Л.Эйлер «Об упругих кривых»

Начиная с XVII в., при объяснении физических явлений и законов активно используется так называемый «принцип наименьшего действия». Согласно этому принципу физические явления и законы могут быть получены в качестве следствия из некоторых задач оптимизации. Хотя сам по себе «принцип наименьшего действия» не относится к законам физического мира, но его применение бывает очень полезно и, что немаловажно, крайне привлекательно. В известном курсе фейнмановских лекций по физике в шестом томе [5] опубликована в качестве «лирического» отступления целая лекция, посвященная этому «принципу».

Исходным импульсом для повышенного внимания к теме «наименьшего действия» в физическом мире послужило данное Пьером Ферма объяснение закона преломления света [6]. Как известно, свет, переходя из одной среды в другую, преломляется. Стоя на берегу Байкала, можем наблюдать, что лежащий в воде камень кажется нам более близким, чем на самом деле. Приближаясь к краю воды, можем заметить, как камень будто бы перемещается в воде. Это не камень движется, а проявляется закон Снелла. При изменении угла, под которым мы смотрим на камень, он может, как бы удаляться или приближаться к нам.

Свет преломляется при переходе из воздуха в воду, из воздуха в стекло. Причем при обратном переходе также происходит преломление луча света, но в обратную сторону. На свойствах такого преломления основано функционирование телескопов, микроскопов, очков.

Еще древние греки заметили, что если свет падает под углом из воздуха в другую среду, то он меняет направление. Чем больше угол между лучом и перпендикуляром к плоскости раздела сред, тем преломление будет больше. Причем, как заметили те же древние греки, соотношение углов «падения» и «преломления» в тех случаях, когда они относительно невелики (выражаются несколькими градусами) является величиной примерно постоянной (для одних и тех же двух сред). Эта закономерность была уточнена в начале XVII в. Виллебродом Снеллиусом. Им было экспериментально установлено, что константой является не соотношение углов, а соотношение синусов углов луча света относительно перпендикуляра к плоскости раздела сред. Это свойство называется законом Снелла или законом преломления света.

Рене Декарт, вслед за Снеллом (так считали такие ученые как Лейбниц, Гюйгенс, хотя сам гасконец Декарт считал результаты своих исследований независимыми от Снелла [7]), тоже пришел к открытию закона преломления света. При этом использовал спорные и несколько путанные теоретические построения. Не будем сейчас обсуждать воззрения Декарта. Отметим только, что излагаемое здесь теоретическое обоснование закона преломление света родилось у Ферма именно в результате критики концепции Декарта.

Данное Ферма объяснение закона преломления света базировалось на необычных для того времени предположениях. Выделим их.

1. *Свет имеет конечную скорость*. Изначально П. Ферма, Р. Декарт и многие другие, считали, что свет имеет бесконечную скорость. Никому долгое время не удавалось даже найти намека на конечность скорости света. Очень мучительно Декарт и Ферма выходили на необходимость использования гипотезы о конечности скорости света при формировании своих концепций по объяснению закона преломления.

2. *Скорость света разная в разных средах. Причем, в более плотных средах она меньше, чем в менее плотных*. Конечно, в то время и это предположение никак нельзя было ни доказать, ни опровергнуть. После первой гипотезы эта вроде как легче для восприятия. Вместе с тем была возможность принять и противоположную точку зрения. Например, давно уже было известно, что звук распространяется быстрее в более плотной среде, чем в менее плотной. В воде примерно в пять раз быстрее, чем в воздухе.

3. *Луч света*, проходя из одной точки в другую, *выбирает такую траекторию, при которой он осуществит перемещение*

DOI: 10.17150/2713-1734.2022.4(2).81-99

за минимальное время. Это предположение выглядит наиболее неправдоподобно: луч света выбирает? Эта гипотеза отталкивалась от принципа, введенного еще древнегреческим ученым Героном, согласно которому луч света действует по кратчайшему пути. Это проявляется в том, что луч света, если ничто ему не мешает, светит по прямой. А при отражении от зеркала луч света перемещается также по кратчайшему пути между двумя точками, только с условием, что этот путь должен коснуться зеркала. Отсюда можно вывести эмпирически наблюдаемый факт: при отражении от зеркала луча света угол его «падения» равен углу его «отражения».

Закон Снелла вытекает из гипотез Ферма

На рис. 1 графически представлено перемещение луча света из точки A в точку B в двух средах. Пусть верхняя среда «воздух». Нижняя на рисунке среда «вода». Обозначим скорости света в этих двух средах v_1 и v_2.

Длины отрезков от точек A и B по перпендикуляру до плоскости раздела сред заданы и равны y_1 и y_2 соответственно. Отрезки по прямым, параллельным плоскости раздела сред до точки, где луч света переходит из одной среды в другую, считаем неизвестными. Обозначим эти неизвестные величины x_1 и x_1. Известно, что суммарное расстояние от проекций точек A и B на плоскость раздела сред равно некоторой заданной величине b. Таким образом, величина b должна равняться сумме значений переменных x_1 и x_1.

Расстояние, пройденное лучом света в «воздухе», согласно теореме Пифагора, равно,

$$s_1(x_1) = (x_1^2 + y_1^2)^{1/2}.$$

Расстояние, пройденное лучом света в «воде», равно

$$s_2(x_2) = (x_2^2 + y_2^2)^{1/2}.$$

Длина пути, деленная на скорость, как известно, равна времени прохождения этого пути. Время, которое потратит луч света из точки A в точку B, выражается функцией

$$f(x_1, x_2) = \frac{s_1(x_1)}{v_1} + \frac{s_2(x_2)}{v_2}. \quad (1)$$

Согласно гипотезам Ферма, луч света «решает» задачу:

$$f(x_1, x_2) \to \min, \quad (2)$$

при условии

$$x_1 + x_2 = b. \quad (3)$$

Эта означает, что требуется найти такие значения переменных, которые удовлетворяют условию-равенству (3) и дают наименьшее значение целевой функции (1), по сравнению с другими значениями переменных, также удовлетворяющих условию (3).

Один из способов решения задачи (2), (3). Можно из условия (3) выразить одну переменную через другую и полученное выражение подставить в целевую функцию. Тогда получим задачу минимизации функции одной переменной без ограничений (ограничение (3) уже учтено в результате выражения из него одной переменной через другую).

Далее следует убедиться, что получили выпуклую функцию одной переменной. Для этого можно найти выражение второй производной и убедится, что она положительная. Выпуклость функции дает право нам считать, что в точке минимума ее производная равна нулю. Приравняв эту производную нулю, получим линейное уравнение, из которого не сложно найти в явном виде оптимальное значение этой переменной. Подставив, полученное значение данной переменной в использовавшееся выражение другой переменной через эту, получим оптимальное значение второй переменной. Примерно такими рассуждениями (это во времена, когда не были еще введены понятия производных, выпуклых функций) в виде геометрических построений воспользовался П. Ферма. Равенство нулю производной в точке оптимума нередко называют *условием оптимальности Ферма*.

Отметим, что оптимальные значения обеих переменных будут выражаться через параметры задачи (2), (3) — они будут зависеть от скорости света в двух средах, от длин проекций точек на плоскость раздела сред и от расстояний между проекциями точек на плоскость раздела двух сред.

Предлагается читателям самим проделать этот путь и в конце его убедиться, что полученные выражения для оптимальных значений переменных будут соответствовать закону Снелла.

Можно воспользоваться другим способом доказательства того, что решение задачи (2), (3) удовлетворяет закону Снелла. Французский математик Лагранж предложил задачи оптимизации с ограничениями равенствами представлять в виде задач безусловной оптимизации путем прибавления к целевой функции исходной задачи функций из ограничений, умноженных на некоторые множители. Эти множители называются теперь *множителями Лагранжа*. Получаемая в итоге функция называется *функцией Лагранжа*. В состав ее переменных входят переменные исходной задачи и множители Лагранжа.

DOI: 10.17150/2713-1734.2022.4(2).81-99

В случае минимизации выпуклой дифференцируемой функции при линейных ограничениях оптимальное решение определяется путем приравнивания нулю частных производных функции Лагранжа по всем ее переменным. Это свойство называется *условием оптимальности Лагранжа*.

Пусть λ — вещественная величина, равная множителю Лагранжа ограничения (3). Пока эта величина не известна, ее предстоит найти. Поэтому иногда эту величину называют неопределенным множителем Лагранжа. По условиям оптимальности Лагранжа в точке оптимума задачи (2), (3) для частных производных целевой функции (1) должны выполняться равенства:

$$\nabla_1 f(x_1, x_2) = \lambda; \; \nabla_2 f(x_1, x_2) = \lambda. \tag{4}$$

Согласно (1), частная производная функции f по первой переменной выражается следующим образом

$$\nabla_1 f(x_1, x_2) = x_1 \; / \; (v_1(x_1^2 + y_1^2)^{1/2}).$$

Частная производная по второй переменной выражается аналогично

$$\nabla_2 f(x_1, x_2) = x_2 \; / \; (v_2(x_2^2 + y_2^2)^{1/2}).$$

Используя эти выражения и условия оптимальности (4), приходим к равенствам

$$\frac{x_1}{s_1} = \lambda v_1, \; \frac{x_2}{s_2} = \lambda v_2. \tag{5}$$

Поскольку,

$$\frac{x_1}{s_1} = \sin\alpha_1, \; \frac{x_2}{s_2} = \sin\alpha_2,$$

то из (5) получаем соотношение

$$\frac{\sin\alpha_1}{\sin\alpha_2} = \frac{v_1}{v_2},$$

которое является ничем иным, как законом Снелла.

Заметим, в представленных здесь выкладках само конкретное значение множителя Лагранжа не использовалось, но его можно найти, если подставить выражения переменных из (5) в условие (3). *Полученное нами доказательство иллюстрирует большие удобства применения множителей Лагранжа в теоретических исследованиях.*

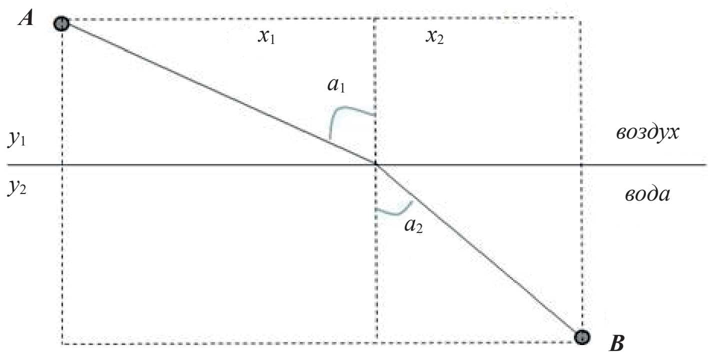

Рис. 1. Иллюстрация к закону преломления света

Как построить мост через реку

Аналогии двигают познание. Коль скоро луч света «выбирает» наилучшую траекторию, то людям в своей экономической деятельности сам бог велел искать наилучшее решение из возможных. Ниже приводится идеализированный экономический пример непосредственного проявления принципа оптимальности в законе преломления света при принятии экономических решений.

Между населенными пунктами A и B надо построить дорогу. Современные дороги — дорогие сооружения. Поэтому при выборе трассы очень важно решить задачу минимизации затрат на строительство. Пусть ситуация несколько идеальная. Между пунктами A и B совершенно однородное пространство с позиции затрат на строительство одного километра дороги. Конечно, в таком случае, надо строить дорогу по прямой (а эта дорога предназначена только для сообщений между населенными пунктами A и B).

Но вот незадача. Между этими населенными пунктами протекает река, через которую надо обязательно строить мост. Причем случилось так, что эта река течет по прямой линии и везде имеет одну и ту же ширину. Конечно, можно не взирая на реку, проложить трассу между A и B по прямой. Тогда мост будет пересекать реку наискосок, как изображено на рис. 2.

Как известно, мост более дорогое сооружение, чем дорога. Если в качестве приоритетной цели поставить задачу уменьшения длины моста, то его следует строить строго поперек реки. При этом в качестве второй по приоритету цели может сохраняться задача уменьшения длины дороги по суше. Наилучшая в таком роде трасса представлена на рис. 3.

Представленные на рис. 2 и 3 трассы можно рассматривать как оптимальные для двух крайних случаев. Первый случай — сто-

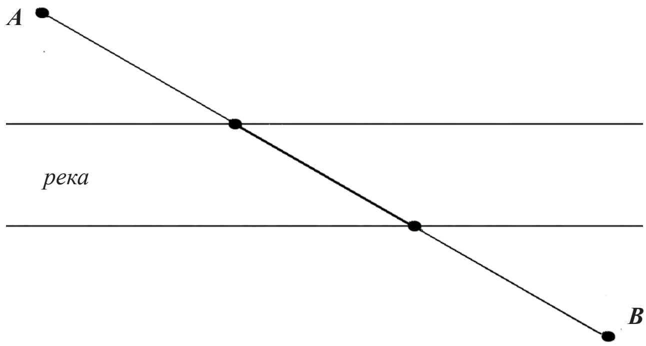

Рис. 2. Трасса между пунктами А и В по прямой (жирной линией выделен мост через реку)

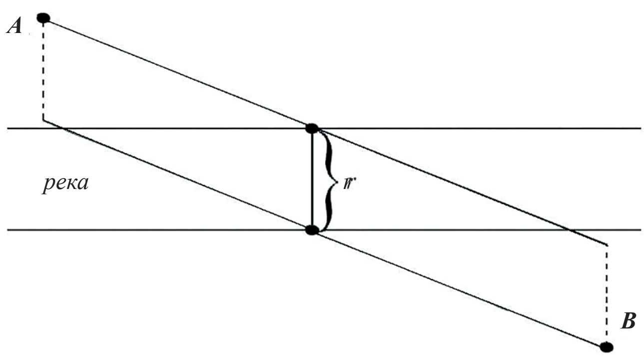

Рис. 3. Трасса между пунктами А и В с кратчайшим мостом

имость дороги по суше равна стоимости такой же длины дороги по реке. Второй случай — стоимость дороги по реке несоизмеримо больше стоимости такой же по протяженности дороги по суше. Реально, конечно, «дорога по реке» может стоить больше, чем по суше, но только в конечное число раз.

Пусть v_1 и v_2 величины, обратные стоимостям строительства одного и того же расстояния дороги «по суше» и «по воде». Эти величины показывают какую по протяженности дорогу по суше и какой по протяженности мост можно построить за одну и ту же сумму денег. Ставится задача выбрать такую трассу между пунктами A и B, при которой общая стоимость дороги по суше и по воде была бы минимальной. Читателям будет не сложно убедится, что такая *трасса пройдет по траектории, представленной на рис. 4, где соотношение углов, с которыми трасса подходит к берегам и с которыми пересекает реку, подчиняется условию, аналогичному закону Снелла*.

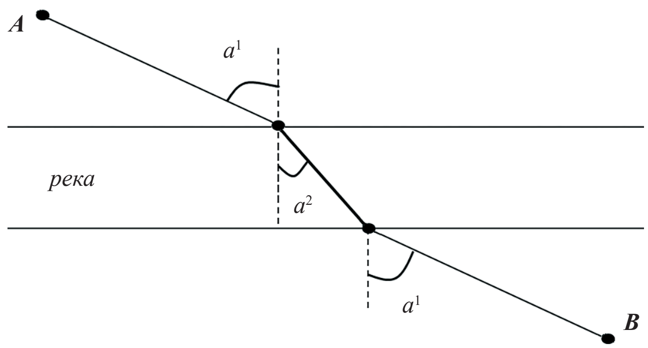

Рис 4. Оптимальная трасса между пунктами A и B:

$$\frac{\sin \acute{a}^1}{\sin \acute{a}^2} = \frac{v^1}{v^2},$$

где v^1, v^2 — длины дорог по суше и по воде, которые можно построить на одну и ту же сумму денег

Гипотезы Ферма и эволюция представлений о природе света

Ученые древней Греции предложили три концепции происхождения и восприятия света [7].

1. Некоторые из них полагали, что источником светоощущения служат только сами глаза людей. Глаза испускают особые флюиды, которые как бы ощупывают предметы на расстоянии. Считается, что такая гипотеза принадлежит пифагорейцам.

2. Другие думали, что свет испускают сами предметы, а наши глаза его только улавливают. Приверженцами такой точки зрения были атомисты, сторонники Демокрита.

3. Емпидокл и Платон ввели дуалистический подход к объяснению механизмов происхождения и ощущения света. Согласно этой концепции, наше восприятие света есть результат взаимодействия двух субстанций: 1) особых флюидов, испускаемых от самих предметов; 2) особого «света очей», излучений, идущих от глаз.

Последняя точка зрения длительное время была распространена среди ученых. «Платон мне друг, но истина дороже!» — красивая фраза, но, увы, и в наше время научные положения часто обосновываются, прежде всего, ссылками на авторитеты. Впрочем, в пользу правомочности концепции Платона можно было, наверное, использовать известные факты различия зрения у разных людей (близорукость, дальнозоркость, дальтонизм).

Платоновского воззрения о природе света придерживался величайший ученый, основатель современной геометрии и аксиоматического метода в науке Евклид, сотрудник знаменитой Александрийской библиотеки. Любопытно, что тот же Евклид в своей книге «Катоптрика» вводит положение о том, что с помощью зеркал от солнца можно зажечь костер. Это положение явно означает независимость света от людей и ошибочность первой и последней из приведенных выше воззрений о природе света.

Греческие ученые многое сделали в создании геометрической оптики, в которой лучи света, в том числе при отображениях от зеркал разной формы, рассматриваются как геометрические объекты. При этом важную роль играл постулат, сформулированный следующим образом в Катоптрике Евклидом: *«Все что видно, видно по прямой».*

В этой же книге Евклида вводится, и другой постулат, как бы противоречащий приведенному выше: *«Если какой-то предмет поместить на дно сосуда и удалить сосуд на столько, что предмет не будет виден, то он вновь станет виден на этом расстоянии, если сосуд залить водой».* Здесь речь идет об опыте по преломлению света, по доказательству явления, которое означает, что свет не всегда распространяется по прямой.

Греческому ученому Клавдию Птолемею, жившему примерно через 400 лет после Евклида (во II в. нашей эры), принадлежат первые из известных экспериментальных исследований преломления света под разными углами на границах двух сред «воздух — вода», «воздух — стекло», «вода — стекло». Он и его последователи осуществили попытки выявления закономерностей в соотношениях углов падения и углов преломления.

Важным вкладом Птолемея в оптику являются проведенные им исследования астрономической рефракции, из-за которой наблюдаемое положение звезд может оказываться выше истинного их положения. Иногда видны звезды уже находящиеся за линией горизонта. К этому же эффекту относится и наблюдаемое порой странное поведение диска солнца во время восходов и закатов. Все это, как мы теперь знаем, также является следствием преломления света при его переходе из безвоздушного пространства во все более плотные слои атмосферы.

После периода упадка Римской империи и до эпохи Возрождения в Европе, греческая наука сохранилась и развивалась, как известно, арабами. В Багдаде и Дамаске существовали научные школы по образцу Александрийской библиотеки, где изучались работы греческих ученых, переведенные с греческого и арамейского языков. Арабские ученые внесли большой вклад в развитие оптики. Ими было установлено на основе опытных данных устройство глаз. Благодаря арабским ученым прочно установилась как единственно верная вторая, из указанных трех точек зрения на природу света. В этом вопросе во времена Снелла, Декарта и Ферма было уже полное единодушие.

К достижениям в оптике греческой науки относится и упомянутый выше постулат Герона: *«... из всех лучей, падающих из данной точки и отражающихся в данную точку, минимальны те, которые от плоских и сферических зеркал отражаются под равными углами»*.

Доказательство этого постулата для случая плоского зеркала приводится на рис. 5. Здесь *A* и *B* данные точки, *M* — точка на зеркале, в которое отражается луч света, проходящий между точками *A* и *B*. Точка *C* расположена по другую сторону зеркала на том же расстоянии от его плоскости, что и точка *B*. Отрезок *BC* перпендикулярен плоскости зеркала.

Длина ломаной *AMB* получается равной длине прямолинейного отрезка *AMC.* При любой другой точке касания луча света зеркала $N \neq M$ длина ломаной *ANB* будет равна длине ломаной *ANC,* которая при *N* будет длиннее отрезка *AC.*

На рис. 6. приведено доказательство постулата Герона для случая сферического зеркала. В точке *M* на зеркале угол падения луча из точки *A* равен углу его отражения в точку *B*. При любой другой точке *P* на сферическом зеркале длина ломаной *APB* будет длиннее ломаной *AMB*. Чтобы убедиться в этом введем точку *N*, в которой отрезок *AP* пересекает плоскость касания зеркала в точке *M*. Длина *ANB,* как было доказано ранее, больше длины *AMB*. Длина *APB* больше длины *AMB*, поскольку сумма длин двух сторон треугольника всегда больше длины третьей стороны. Следовательно, длина *APB* больше длины *AMB,* что и требовалось установить.

Следует подчеркнуть, что постулат Герона был сформулирован только для плоских и сферических (выпуклых той стороной, которая отражает) зеркал. Это и представлено на рис. 5, 6. Для вогнутых зеркал принцип (постулат) Герона может оказаться нарушенным. Это показано на рис. 7. Для вогнутых зеркал наблюдаемый путь луча между двумя точками через отражение в зеркале может быть (но не обязательно) не наикратчайшим, а наоборот наиболее длинным из всех ломаных между заданными двумя точками и какой — либо точкой на поверхности зеркала.

Пьер Ферма хорошо знал от своего друга де ла Шамбра не только постулат Герона, но и его нарушение — перерождение в противоположность для вогнутых зеркал [7; 8]. В качестве выхода из возникшего затруднения с принципом «кратчайшего пути» Ферма предложил рассматривать выбор лучом света точки касания зеркала не относительно поверхности самого зеркала, а относительно плоскости касания поверхности зеркала в точке отражения луча. Конечно, в таком случае от луча света уже требовались несколько большие мыслительные способности. Он должен не только уметь выбирать наилучшую точку на поверхности, но и уметь строить воображаемую плоскость. Причем ему необходимо

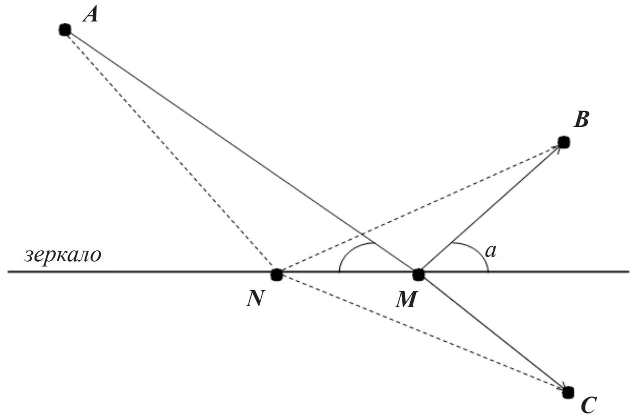

Рис 5. Доказательство постулата Герона для случая плоского зеркала. Длина ломаной AMB равна длине прямой AMC и короче длины ломаных ANB и ANC

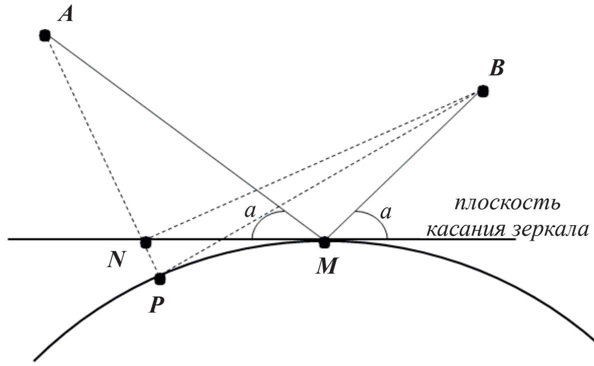

Рис 6. Доказательство постулата Герона для случая сферического зеркала. Длина ломаной APB больше длины ломаной ANB. А длина ломаной ANB, как доказано ранее, больше длины ломаной AMB

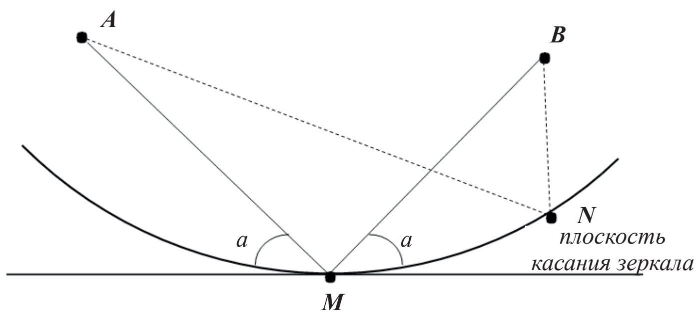

Рис 7. Луч света при отражении от вогнутого зеркала может проходить не самый кратчайший путь. Длина ломаной AMB длиннее длины ломаной ANB

было строить плоскость, проходящую именно через ту точку, которую ему и предстояло выбрать.

Для перехода от принципа «кратчайшего пути» Герона к принципу «наименьшему времени» Ферма необходимо было отказаться от представления о бесконечности скорости света. Галилей еще в 30-х гг. XVII в. предлагал поставить опыт по измерению скорости света на основе световых сигналов (подаваемых фонарями) между двумя участниками. Сначала с близкого расстояния (в несколько локтей) и затем с дальнего расстояния (в одну — две мили). Во втором случае световой сигнал «туда и обратно» должен пройти через больший промежуток времени, на основе чего можно, по мысли Галилея, оценить скорость света. Кто мог тогда подумать, что свет «туда и обратно» даже через всю Италию проходит менее чем за одну тысячную времени между двумя ударами человеческого пульса (этим, а также песочными или, несколько более точными, водяным часами мерили в то время время).

Примерно в это же время голландский ученый Бекман предложил независимо от Галилея несколько иной, но похожий опыт для определения скорости света, в котором вместо второго участника использовалось зеркало. Он полагал, что импульс света до зеркала от стоящего на 250 шагов и обратно должен пройти за заметный интервал времени, сопоставимый с одной секундой.

Декарт в переписке с Бекманам счел, что время для прохождения указанного пути «в 500 шагов» может быть намного короче, чем интервал между двумя ударами пульса. Он предположил, что это может составлять всего одну 24-ую секунды. Такой отрезок времени нельзя было зарегистрировать располагаемыми в то время измерителями времени. Вместе с тем он предложил другой мысленный опыт. По его расчетам при его предварительной оценке скорости света, ему потребуется около двух часов для прохождения пути от Земли до Луны и обратно. Поэтому, при его предположениях, наблюдаемые затмения Луны должны заметно запаздывать против расчетного времени. Поскольку таких запаздываний не было обнаружено, то Декарт счел доказанной бесконечность скорости света. В те времена трудно было представить, что свету для прохождения пути от Земли до Луны и обратно требуется всего лишь 2,5 с. С такой точностью нельзя было даже вычислить расчетное время наступления лунного затмения и, тем более, измерять отклонения от него. В подтверждение слов из песни «Не думай о секундах свысока» можно напомнить, что на заре космонавтки один из первых советских спутников не вышел на планировавшуюся для него орбиту луны, потому что сигнал на торможение был подан поздно, без учета времени его прохождения до окололунного пространства.

Впервые существование скорости света было доказано в 1677 г. датским ученым Оле Рёмером на основе тщательного анализа отклонений в периоде обращения спутника Юпитера Ио [8]. Это ближайший к Юпитеру спутник, один из четырех спутников этой планеты, открытых еще Галлием. Период обращения Ио составляет примерно 42,5 ч. Предшественники Рёмера исследовали возможность использования наблюдения за этим спутником в качестве хронометра при мореплаваниях в целях расчета долготы положения кораблей.

Рёмер доказал, что установленные еще его предшественниками отклонения в моментах выхода Ио из тени Юпитера объясняется именно тем, что лучу света требуется примерно 22 мин (по его оценкам) для прохождения орбиты Земли. В последствии было уточнено, что на самом деле лучу света требуется 16 мин чтобы пройти расстояние, равное длине диаметра орбиты Земли. При нахождении Земли в ближней точке к Юпитеру Ио выходит из его тени раньше, чем при нахождении Земли в дальней точке орбиты от Юпитера.

Данное П. Ферма объяснение закона преломления света первоначально скептически воспринималось многими учеными, в частности Гюйгенсом. Вместе с тем, именно он стал вместе с Гуком создателем волновой теории света, в рамках которой было дано физическое объяснение гипотез Ферма, в том числе гипотезы увеличения скорости света в более плотной среде и закона преломления Снелла. Причем известно, что волновая теория создавалась Гюйгенсом под влиянием гипотез Ферма.

Также в конце XVII в. оформилась другая, корпускулярная теория света, в рамках которой свет представлялся потоком частиц особо сорта. Создателем корпускулярной теории принято считать И. Ньютона. Хотя представление природы света в виде потока частиц рассматривалось ранее и другими учеными, в том числе Декартом. В пользу него как раз свидетельствовало прямолинейное распространение света. Причем концепцию Ньютона, как и представления Декарта, нельзя считать однозначно «корпускулярными». Декарт объяснял различия цветов различиями в скорости вращения частичек света. Ньютон для этих целей использовал предположение о различиях в периодах колебаний этих частиц.

Согласно корпускулярной теории, скорость света в более плотной оптической среде больше. Причем при переходе в более плотную среду возрастает перпендикулярная плоскости границы раздела сред составляющая скорости. Параллельная этой плоскости составляющая скорости света не меняется. Таким образом, корпускулярная теория, так же, как и волновая, объясняет закон преломления света Снелла разностью скоростей света в разных средах. При этом корпускулярная теория приводит к представлению о соотношениях скоростей света противоположной второй гипотезе Ферма.

В развитие объяснения Декарта известный ученый Мопертюи предложил заменить вторую в нашей нумерации гипотезу Ферма на другую целевую установку луча света при выборе траектории, — на задачу минимизации так называемого «Действия» [9]. При этом менялась и третья гипотеза на противоположную. Предлагалось считать, что в более плотных средах свет распространяется быстрее.

Четкое математическое определение понятия «Действие» дал Л. Эйлер, как произведение трех величин массы, скорости и пройденного расстояния (точнее, как интеграла произведения первых двух величин по траектории пройденного пути). И на основе таких существенно измененных гипотезах Ферма также вполне строго математически выводится закон преломления света Снелла. Принцип минимизации Действия Мопертюи распространил на другие известные физические законы, считая его божественной первоосновой всех физических явлений и процессов.

Обе альтернативные концепции объяснения поведения света базировались на предположении оптимального выбора лучем траектории. При этом использовались разные целевые функции этого выбора и разные гипотезы о соотношениях скоростей света в разных средах. Только экспериментально можно было установить какая из этих концепций верная.

В 1849 г. в земных условиях французский физик А. Физо получил достаточно близкую оценку скорости свет в воздухе. В следующем 1850 г. другой французский экспериментатор Леон Фуко (именем которого назван маятник, демонстрирующий вращение земли) доказал, что в воде скорость света меньше, чем в воздухе. И Физо и Фуко пользовались механизмами, в первом случае, периодически отражающими луч света, во-втором периодически прерывающим этот луч и его отражение с очень точными на тот момент измерителями времени [7]. Эти измерители времени в виде маятниковых часов были созданы известным в то время французским часовым мастером Брегетом (вспомним пушкинского Евгения Онегина: «… когда недремлющий «Брегет» не позвонит ему обед.»). Тем самым была обоснована как доказанный факт вторая из приведенных в предыдущем разделе гипотеза Ферма. Доказана несостоятельность концепции всеобщей первоосновы принципа наименьшего действия Монпертюи.

Заключение

В данной статье сформулированы и подробно рассмотрены все исходные предположения о механизме действия луча света, порождающие его преломление по экспериментально установленному закону Снелла. Эти гипотезы демонстрируют необходимую смелость в фантазиях об устройстве мира для его понимания. Вырабатываемые концепции механизмов действия света, как было показано, породили новое математическое направление — оптимизацию, которая впоследствии через другие физические проблемы, через экономические и технические задачи прочно вошла в науку и жизнь.

Рассмотренная здесь история, порожденная законом преломления света, демонстрирует огромную пользу от тесного сочетания смелых научных гипотез, теоретических построений, экспериментов и наблюдений для развития понимания картины мира. Чего, увы, не имеет в полной мере экономическая наука. Одна из причин этого — происходящие постоянные изменения социально-экономического устройства человеческих сообществ. Физическая же картина мира остается неизменной за многие тысячелетия, в течении всего периода изучения человечеством этой картины.

Эта история является еще одной иллюстрацией универсализма математики [10] и ее направленностью прежде всего на познание устройства мира. Практические приложения в данном, как и во многих других случаях оказались следствиями, а не исходными целями построения математических концепций.

Список использованной литературы

1. Васильев Ф.П. Методы оптимизации : в 2 ч. / Ф.П. Васильев. — Москва : Факториал Пресс, 2002. — 2 ч.

2. Поляк Б.Т. Введение в оптимизацию / Б.Т. Поляк. — Москва : Наука, 1983. — 384 с.

3. Деннис Дж.Б. Математическое программирование и электрические цепи / Дж.Б. Деннис. — Москва : Изд-во иностр. лит., 1961. — 215 с.

4. Уайлд Д. Оптимальное проектирование / Д. Уайлд. — Москва : Мир, 1981. — 272 с.

5. Фейнман Р. Фейнмановские лекции по физике / Р. Фейнман, Р. Лейтон, М. Сэндэ. — Москва : Мир, 1966. — Т. 6. — 343 с.

6. Храмов Ю.А. Физики : биогр. справочник / Ю.А. Храмов. — 2-е изд. испр. и доп. — Москва : Наука, 1983. — 394 с.

7. Льоцци М. История физики / М. Льоцци. — Москва : Мир, 1970. — 464 с.

8. Филонович С.Р. Самая большая скорость / С.Р. Филонович. — Москва : Наука, 1983. — 176 с.

9. Полак Л.С. Вариационные принципы механики: их развитие и применение в физике / Л.С. Полак. — Москва : Либроком, 2010. — 600 с.

10. Перминов В.Я. Реальность математики / В.Я. Перминов. — EDN OWUWNX // Вопросы философии. — 2012. — № 2. — С. 24–39.

References

1. Vasilev F.P. *Methods Optimization*. Moscow, Faktorial Press Publ., 2002. 2 pt.

2. Polyak B.T. *Introduction to optimization*. Moscow, Nauka Publ., 1983. 384 p.

3. Dennis J.B. *Mathematical Porgramming and Electrical Networks*. New York, The Massachusetts inst. of technology and Wiley, 1959. 198 p. (Russ. ed.: Dennis J.B. *Mathematical Porgramming and Electrical Networks*. Moscow, Inostrannaya literatura Publ., 1961. 215 p.).

4. Wilde D.J. *Globally Optimal Design*. Wiley, 1978. 288 p. (Russ. ed.: Wilde D.J. *Globally Optimal Design.* Moscow, Mir Publ., 1981. 272 p.).

5. Feynman R.P., Leigton R.B., Sands M. *The Feynman Lectures on Physics.* Wiley, 1964. 528 p. (Russ. ed.: Feynman R.P., Leigton R.B., Sands M. *The Feynman Lectures on Physics.* Moscow, Mir Publ., 1966. Vol. 6. 343 p.).

6. Khramov Yu.A. *Physicists*. Moscow, Nauka Publ., 1983. 394 p.

7. Gliozzi M. *Storia della Fisica (History of Physics*). Torino, 1965. (Russ. ed.: Gliozzi M. *History of Physics.* Moscow, Mir Publ., 1970. 464 p.).

8. Filonovich S.R. *The fastest speed.* Moscow, Nauka Publ., 1983. 176 p.

9. Polak L.S. *Variational principles of mechanics: their development and application in physics.*Moscow, Librokom Publ., 2010. 600 p.

10. Perminov V.Ya. Reality of Mathematic. *Voprosy filosofii = Issues of Philosophy,* 2012, no. 2, pp. 24–39. (In Russian). EDN: OWUWNX.

Информация об авторе

Зоркальцев Валерий Иванович — доктор технических наук, профессор, заведующий Лабораторией математического моделирования, Байкальский государственный университет, г. Иркутск, Российская Федерация, e-mail: vizork@mail.ru.

Information about the Author

Valeriy I. Zorkaltsev — Doctor of Technical Sciences, Professor, Head of the Lab of Mathematical Modeling, Baikal State University, Irkutsk, Russian Federation, e-mail: vizork@mail.ru.

Для цитирования

Зоркальцев В.И. Начала оптимизации: закон Снелла и принцип Ферма / В.И. Зоркальцев. — DOI 10.17150/2713-1734.2022.4(2).81-99 // System Analysis & Mathematical Modeling. — 2022. — Т. 4, № 2. — С. 81–99.

For Citation

Zorkaltsev V.I. The Beginnings of Optimization: Snell's Law and Fermat's Principle. *System Analysis & Mathematical Modeling*, 2022, vol. 4, no. 1, pp. 81–99. (In Russian). DOI: 10.17150/2713-1734.2022.4(2).81-99.