УДК 517.977.5

С.П. Сорокин
Институт динамики систем и теории управления имени В.М. Матросова СО РАН, г. Иркутск, Российская Федерация

ПОЗИЦИОННОЕ УСЛОВИЕ ОПТИМАЛЬНОСТИ ДЛЯ НЕВЫПУКЛОЙ ДИСКРЕТНОЙ ДИНАМИЧЕСКОЙ ЛИНЕЙНО-КВАДРАТИЧНОЙ ЗАДАЧИ

Аннотация. В статье рассмотрена невыпуклая линейно-квадратичная задача оптимизации в дискретной динамической системе. Предложено необходимое условие оптимальности с позиционными управлениями спуска по функционалу, порожденными квадратичной мажорантой. В отличии от дискретного принципа максимума данное условие не требует никаких свойств выпуклости задачи.

Ключевые слова. Линейно-квадратичная задача, дискретное оптимальное управление, необходимое условие оптимальности, позиционные управления, слабо монотонные функции.

Информация о статье. Дата поступления: 25 ноября 2021 г.

S.P. Sorokin
Matrosov Institute for System Dynamics and Control Theory of Siberian Branch of the Russian Academy of Sciences, Irkutsk, Russian Federation

FEEDBACK OPTIMALITY CONDITION FOR NONCONVEX DISCRETE LINEAR-QUADRATIC OPTIMAL CONTROL PROBLEM

Abstract. The paper analyzed a non-convex linear-quadratic optimization problem in a discrete dynamic system. We obtained necessary optimality condition with feedback controls which allow a descent of the functional cost. Such controls are generated by the quadratic majorant of the cost. In contrast to the discrete maximum principle, this condition does not require any convexity properties of the problem.

Keywords. Linear-quadratic optimization problem, discrete optimal control, necessary optimality condition, feedback controls, weak monotone functions.

Article info. Received 25 November 2021.

Введение и постановка задачи

В статье рассматривается следующая невыпуклая дискретная линейно-квадратичная задача оптимального управления [1–6]:

$$x_{k+1} = A_k(u_k)x_k + b_k(u_k), \quad x_0 = \tilde{x}_0, \quad u_k \in U_k, \quad k = 0,1,\ldots,N-1, \qquad (1)$$

$$J = \sum_{k=1}^{N-1} \frac{1}{2}\left[x_k' P_k x_k + 2u_k' Q_k x_k + u_k' R_k u_k + 2p_k' x_k + 2r_k' u_k\right] +$$

DOI: 10.17150/2713-1734.2021.8(3).169-175

$$+\frac{1}{2}x_N{'}Dx_N + d{'}x_N \to \min.$$

Здесь $x=\{x_k\}_{k=0}^{N}$ и $u=\{u_k\}_{k=0}^{N-1}$ — траектория и управление динамической системы (1), $x_k \in R^n$, $u_k \in R^m$. Матричные функции A_k имеют размерность $n \times n$, вектор-функции $b_k \in R^n$, матрицы P_k, Q_k, R_k, D и векторы p_k, r_k, d имеют соответствующую размерность (P_k, R_k, и D симметричны). Множества $U_k \subset R^m$ предполагаются компактными. Штрихом здесь и далее обозначается операция транспонирования.

В работе предлагается вариант необходимого условия оптимальности, использующего позиционные управления потенциального спуска по целевому функционалу, порождаемые квадратичной функцией, обладающей свойством слабого убывания относительно динамической системы [7]. Работа и результаты лежат в русле исследований [8–14], посвященных усилению принципа максимума Понтрягина для классических и дискретных задач динамической оптимизации, разработке более сильных необходимых условий оптимальности с помощью полурешений неравенств типа Гамильтона-Якоби.

Предварительно сведем представленную задачу к терминальному виду и обозначим ее через (P):

$$x_{k+1} = A_k(u_k)x_k + b_k(u_k), \ \ x_0 = \tilde{x}_0, \tag{2}$$

$$y_{k+1} = y_k + \frac{1}{2}\left[x_k{'}P_kx_k + 2u_k{'}Q_kx_k + u_k{'}R_ku_k + 2p_k{'}x_k + 2r_k{'}u_k\right], \ y_0 = 0, \tag{3}$$

$$u_k \in U_k, \quad k = 0,\ 1,\dots,\ N-1, \tag{4}$$

$$J(\sigma) = l(x_N, y_N) = y_N + \frac{1}{2}x_N{'}Dx_N + d{'}x_N \to \min.$$

Через $\sigma = (x, y, u)$ будем обозначать допустимый процесс в задаче (P), т.е., тройку векторов $y=\{y_k\}_{k=0}^{N}$, $y=\{y_k\}_{k=0}^{N}$, $u=\{u_k\}_{k=0}^{N-1}$, удовлетворяющую условиям (2)–(4). Заметим, что $y_k \in R$. Исследуемый на оптимальность допустимый процесс будем помечать чертой — $\bar{\sigma} = (\bar{x}, \bar{y}, \bar{u})$.

Позиционный принцип минимума с квадратичной слабо убывающей функцией

Представим основные конструкции и факты, используемые в формулировке так называемого позиционного принципа минимума — нелокального условия оптимальности — в контексте дискретных задач оптимального управления [12–14], применительно к задаче (P).

Функция Понтрягина имеет вид

$$H_k(x_k,\psi_{k+1},u_k) = \psi_{k+1}'\left[A_k(u_k)x_k + b_k(u_k)\right] +$$

$$+\left[y_k + \frac{1}{2}\left(x_k'P_k x_k + 2u_k'Q_k x_k + u_k'R_k u_k + 2p_k'x_k + 2r_k'u_k\right)\right],$$

а сопряженная система для двойственной переменной $\psi = \{\psi_k\}_{k=0}^N$ определяется как

$$\psi_k = \frac{\partial}{\partial x_k}H_k(x_k,\psi_{k+1},u_k) = A_k'(u_k)\psi_{k+1} + P_k x_k + Q_k'u_k + p,$$

$$k = N-1, N-2, \ldots, 0,$$

с условием трансверсальности

$$\psi_N = \frac{\partial}{\partial x_N}l(x_N, y_N) = D_N x_N + d$$

(противоположного знака по сравнению с принятым в принципе максимума).

Решение сопряженной системы — котраекторию, — отвечающую исследуемому процессу $\bar{\sigma}$, так же будем помечать чертой — $\bar{\psi} = \{\bar{\psi}_k\}_{k=0}^N$.

Введем дискретную функцию

$$\varphi_k = \varphi_k(x_k, y_k) = \frac{1}{2}x_k'S_k x_k + \bar{\psi}_k'x_k + y_k,\ k = 0,\ 1, \ldots, N,$$

где последовательность симметричных матриц $\{S_k\}$ удовлетворяет дискретному аналогу (матричного) уравнения Риккати

$$A_k'(\bar{u}_k)S_{k+1}A_k(\bar{u}_k) + P_k - S_k = 0,\ k = 0,\ 1, \ldots, N-1$$

с условием $S_N = -D$.

Таким образом, функция $\varphi = \{\varphi_k\}_{k=0}^N$ полностью определяется входными данными задачи и исследуемым процессом $\bar{\sigma}$.

Введем «приращение» функции φ:

$$\Delta\varphi_k = \Delta\varphi_k(x_k, y_k, u_k) = \varphi_{k+1}(f_k, g_k) - \varphi_k(x_k, y_k),$$

где f_k и g_k обозначают правые части рекуррентных соотношений из (2) и (3), т.е.

$$f_k = f_k(x_k, u_k) = A_k(u_k)x_k + b_k(u_k),$$

$$g_k = g_k(x_k, y_k, u_k) = y_k + \frac{1}{2}\left[x_k'P_k x_k + 2u_k'Q_k x_k + u_k'R_k u_k + 2p_k'x_k + 2r_k'u_k\right].$$

Рассмотрим многозначное отображение

$$U_k^{\varphi}(x_k, y_k) = \underset{u_k \in U_k}{Arg\min}\left\{\Delta\varphi_k(x_k, y_k, u_k)\right\} = \underset{u_k \in U_k}{Arg\min}\left\{\varphi_{k+1}(f_k, g_k) - \varphi_k(x_k, y_k)\right\},$$
$$k = 0,\ 1, \ldots, N-1,$$

и через V обозначим множество селекторов этого многозначного отображения — позиционных управлений, т.е. конечных последовательностей функций $v(x, y) = \left\{v_k(x_k, y_k)\right\}_{k=0}^{N-1}$:

$$\Delta\varphi_k\left(x_k, y_k, v_k(x_k, y_k)\right) = \min_{u_k \in U_k}\left\{\Delta\varphi_k(x_k, y_k, u_k)\right\} \ \forall x_k, y_k \ \forall k.$$

Для каждого позиционного управления v из множества V через $\sigma^v = (x^v, y^v, u^v)$ будем обозначать процесс системы (2), (3) при управлении $u = u^v = v(x, y)$. Процедура построения такого управления и самого процесса осуществляется пошагово при $k = 0, 1, \ldots, N-1$. Распространение целевого функционала

$$J(\sigma) = l(x_N, y_N) = y_N + \frac{1}{2}x_N{}' D x_N + d' x_N$$

на класс позиционных управлений и соответствующих процессов естественно.

Теорема. Если процесс $\bar{\sigma} = (\bar{x}, \bar{y}, \bar{u})$ оптимален в задаче (P), то

$$J(\bar{\sigma}) \le J(\sigma^v) \quad \forall v \in V.$$

Доказательство теоремы очевидным образом вытекает из построения отображения $U_k^{\varphi}(x_k, y_k)$ и его селекторов, поскольку значения $v_k(x_k, y_k) \in U_k$ $\forall x_k, y_k$. Важным здесь является обоснование выбранного способа построения позиционных управлений, претендующих на «улучшение» исследуемого процесса $\bar{\sigma}$.

Нетрудно видеть, что

$$\varphi_N = \varphi_N(x_N, y_N) = \frac{1}{2}x_N{}' S_N x_N + \bar{\psi}_N{}' x_N + y_N$$

совпадает с

$$l(x_N, y_N) = \frac{1}{2}x_N{}' D x_N + d' x_N + y_N$$

при выполнении условия трансверсальности

$$\psi_N = D_N x_N + d$$

и требования $S_N = -D$.

Это означает, что

$$l(x_N, y_N) = \varphi_N = \sum_{k=0}^{N-1}\Delta\varphi_k = \sum_{k=0}^{N-1}\left[\varphi_{k+1}(f_k, g_k) - \varphi_k(x_k, y_k)\right] + \varphi_0(x_0, y_0). \quad (5)$$

Таким образом, управления, порождающие процессы σ, обеспечивающие «суммарное» снижение значения функции φ, потенциально могут рассматриваться в качестве улучшающих по функционалу исследуемый процесс.

Построение самого многозначного отображения $U_k^{\varphi}(x_k, y_k)$ также требует пояснения. Формула (5) подсказывает, что функция φ должна обладать свойством слабого убывания вдоль траекторий системы (2), (3). Это означает, что из любой точки (k, x_k, y_k) существует траектория системы (2), (3), вдоль которой функция φ не возрастает. Такое свойство обеспечивается неравенством

$$\min_{u_k \in U_k} \left(\Delta\varphi_k(x_k, y_k, u_k) \right) \le 0 \ \ \forall x_k, y_k \ \ \forall k . \qquad (6)$$

Именно такие траектории (и порождающие их управления) представляют интерес при применении теоремы. Следует заметить, что сама функция φ, конструкция которой представлена выше, таким свойством, вообще говоря, не обладает, однако с помощью несложной нормировки можно построить функцию

$$\tilde{\varphi}_k(x_k, y_k) = \varphi_k(x_k, y_k) + \sum_{i=k}^{N} \max_{u_i \in U_i} \left[\Delta\varphi_i \right],$$

удовлетворяющую неравенству (6), при этом многозначные отображения $U_k^{\varphi}(x_k, y_k)$ и $U_k^{\tilde{\varphi}}(x_k, y_k)$ для функций φ и $\tilde{\varphi}$ совпадают. Здесь также следует заметить, что

$$\tilde{\varphi}_N(x_N, y_N) = \varphi_N(x_N, y_N) = l(x_N, y_N) .$$

Таким образом, применение исходной функции φ для построения управлений и процессов, предлагаемых к сравнению с исследуемым $\bar{\sigma} = (\bar{x}, \bar{y}, \bar{u})$ является вполне обоснованным.

Заключение

В статье предложен вариант позиционного необходимого условия оптимальности для невыпуклой линейно-квадратичной задачи оптимального управления. Следует отметить, что дискретный принцип максимума [1–6] для такой задачи, вообще говоря, не является даже необходимым условием оптимальности, однако, предложенный подход может быть вполне эффективным. Дальнейшие исследования в этом направлении будут связаны с апробацией приведенной теоремы и разработкой основанных на ней алгоритмов итерационного анализа и решения задач.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Болтянский В.Г. Оптимальное управление дискретными системами / В.Г. Болтянский. — Москва : Наука, 1973. — 448 с.

2. Пропой А.И. Элементы теории оптимальных дискретных процессов / А.И. Пропой. — Москва : Наука, 1973. — 256 с.

3. Габасов Р. Качественная теория оптимальных процессов / Р. Габасов, Ф.М. Кириллова. — Москва : Наука, 1971. — 508 с.

4. Krotov V.F. Global Methods in Optimal Control Theory / V.F. Krotov. — New York : Marcel Dekker, 1996. — 384 p.

5. Гурман В.И. Принцип расширения в задачах управления / В.И. Гурман. — 2-е изд., перераб. и доп. — Москва : Наука, 1997. — 288 с.

6. Mordukhovich B.S. Variational Analysis and Generalized Differentiation / B.S. Mordukhovich. — Berlin : Springer, 2006. — 580 p.

7. Nonsmooth Analysis and Control Theory / F.H. Clarke, Yu.S. Ledyaev, R.J. Stern, P.R. Wolenski. — New York : Springer, 1998. — 278 p.

8. Dykhta V.A. Variational Necessary Optimality Conditions with Feedback Descent Controls for Optimal Control Problems / V.A. Dykhta // Doklady Mathematics. — 2015. — Vol. 91, no. 3. — P. 394–396.

9. Dykhta V.A. Positional strengthenings of the Maximum Principle and sufficient optimality conditions / V.A. Dykhta // Proceedings of the Steklov Institute of Mathematics. — 2016. — Vol. 293. — P. S43–S57.

10. Dykhta V.A. Weakly monotone solutions of the Hamilton-Jacobi inequality and optimality conditions with positional controls / V.A. Dykhta // Automation and remote control. — 2014. — Vol. 75, no. 5. — P. 829–844.

11. Dykhta V.A. Nonstandard duality and nonlocal necessary optimality conditions in nonconvex optimal control problems / V.A. Dykhta // Automation and remote control. —2014. — Vol. 75, no. 11. — P. 1906–1921.

12. Dykhta V.A. Feedback Minimum Principle for Optimal Control Problems in Discrete-Time Systems and Its Applications / V.A. Dykhta, S.P. Sorokin // Mathematical Optimization Theory and Operations Research: XVIII International Conference (MOTOR 2019). — Ekaterinburg, 2019. — P. 449–460.

13. Sorokin S.P. Necessary feedback optimality conditions and nonstandard duality in problems of discrete system optimization / S.P. Sorokin // Automation and remote control. — 2014. — Vol. 75, no. 9. — P. 1556–1564.

14. Сорокин С.П. Монотонные функции типа Ляпунова и условия глобальной оптимальности для задач управления дискретными системами / С.П. Сорокин // Известия Иркутского государственного университета. Серия: Математика. — 2011. — Т. 4, вып. 3. — С. 132–145.

REFERENCES

1. Boltyanskii V.G. Optimal control of discrete systems. Moscow, Nauka Publ., 1973. 448 p.

2. Propoi A.I. Elements of the Theory of Optimal Discrete Processes. Moscow, Nauka Publ., 1973. 256 p.

3. Gabasov R., Kirillova F.M. Qualitative theory of optimal processes. Moscow, Nauka Publ., 1971. 508 p.

4. Krotov V.F. *Global Methods in Optimal Control Theory*. New York, Marcel Dekker, 1996. 384 p.

5. Gurman V.I. *Expansion principle in management tasks*. Moscow, Nauka Publ., 1997. 288 p.

6. Mordukhovich B.S. *Variational Analysis and Generalized Differentiation*. Berlin, Springer, 2006. 580 p.

7. Clarke F.H., Ledyaev Yu.S., Stern R.J., Wolenski P.R. *Nonsmooth Analysis and Control Theory*. New York, Springer, 1998. 278 p.

8. Dykhta V.A. Variational Necessary Optimality Conditions with Feedback Descent Controls for Optimal Control Problems. *Doklady Mathematics*, 2015, vol. 91, no. 3, pp. 394–396.

9. Dykhta V.A. Positional strengthenings of the Maximum Principle and sufficient optimality conditions. *Proceedings of the Steklov Institute of Mathematics*, 2016, vol. 293, pp. S43–S57.

10. Dykhta V.A. Weakly monotone solutions of the Hamilton-Jacobi inequality and optimality conditions with positional controls. *Automation and remote control*, 2014, vol. 75, no. 5, pp. 829–844.

11. Dykhta V.A. Nonstandard duality and nonlocal necessary optimality conditions in nonconvex optimal control problems. *Automation and remote control*, 2014, vol. 75, no. 11, pp. 1906–1921.

12. Dykhta V.A., Sorokin S.P. Feedback Minimum Principle for Optimal Control Problems in Discrete-Time Systems and Its Applications. *Optimization Theory and Operations Research. XVIII International Conference (MOTOR 2019).* Ekaterinburg, 2019, pp. 449–460.

13. Sorokin S.P. Necessary feedback optimality conditions and nonstandard duality in problems of discrete system optimization. *Automation and remote control*, 2014, vol. 75, no. 9, pp. 1556–1564.

14. Sorokin S.P. Monotone Lyapunov type functions and global optimality conditions for discrete control problems. *Izvestiya Irkutskogo gosudarstvennogo universiteta. Seriya: Matematika = The Bulletin of Irkutsk State University. Series Mathematics,* 2011, Vol. 4, iss. 3, pp. 132–145. (In Russian).

ИНФОРМАЦИЯ ОБ АВТОРЕ

Сорокин Степан Павлович — кандидат физико-математических наук, заведующий лабораторией оптимального управления, Институт динамики систем и теории управления имени В.М. Матросова СО РАН, г. Иркутск, Российская Федерация, e-mail: sorsp@mail.ru.

INFORMATION ABOUT THE AUTHOR

Stepan P. Sorokin — PhD in Physics and Mathematics, Head of the Lab of Optimal Control, Matrosov Institute for System Dynamics and Control Theory of Siberian Branch of the Russian Academy of Sciences, Irkutsk, Russian Federation, e-mail: sorsp@mail.ru.

ДЛЯ ЦИТИРОВАНИЯ

Сорокин С.П. Позиционное условие оптимальности для невыпуклой дискретной динамической линейно-квадратичной задачи / С.П. Сорокин. — DOI 10.17150/2713-1734.2021.8(3).169-175 // System Analysis & Mathematical Modeling. — 2021. — Т. 3, № 3. — С. 169–175.

FOR CITATION

Sorokin S.P. Feedback Optimality Condition for Nonconvex Discrete Linear-Quadratic Optimal Control Problem. *System Analysis & Mathematical Modeling*, 2021, vol. 3, no. 3, pp. 169–175. DOI: 10.17150/2713-1734.2021.8(3).169-175. (In Russian).