УДК 519.86

В.И. Зоркальцев
Лимнологический институт СО РАН;
Байкальский государственный университет,
г. Иркутск, Российская Федерация

АКСИОМАТИЧЕСКИЙ ПОДХОД К ИССЛЕДОВАНИЮ МЕТОДОВ ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ (НА ПРИМЕРЕ ЗАДАЧИ ВЫБОРА СПОСОБА ВЫЧИСЛЕНИЯ УДЕЛЬНОГО ВЕСА ФАКТОРОВ В МУЛЬТИПЛИКАТИВНЫХ ИНДЕКСНЫХ МОДЕЛЯХ)

Аннотация. Приводится общая схема сравнительного анализа и выбора методов решения задач прикладной математики на базе аксиоматического подхода. Этот подход основывается на представлении вычислительных методов в виде отображения исходных данных в искомые результаты. Априори вводится широкий класс таких отображений, заведомо содержащий все известные и потенциально возможные методы решения данной задачи. Затем формулируются содержательно необходимые и математически строгие требования к этим отображениям, т.е. к свойствам методов и моделей, которые должны использоваться для ее решения. На основе теоретических исследований определяются отображения удовлетворяющие всем введенным требованиям, либо устанавливается отсутствие метода им всем удовлетворяющего, что означает противоречивость требований. Подробно рассматривается проблема выбора методов вычисления удельных весов экономических индексов-факторов в результирующем индексе, являющимся произведением индексов-факторов. В данном случае исходное множество вычислительных методов состоит из отображений n-мерных векторов с положительными компонентами (наборы исходных индексов факторов, где n их число) в n-мерные векторы со всеми положительными коэффициентами, компоненты которых означают вычисленный удельный вес каждого из индексов-факторов в их произведении. Формулируется и обсуждается система требования к методам вычисления удельных весов индексов-факторов. Приводится теорема, согласно которой все эти требования выполняются в том и только в том случае, если удельные веса вычисляются так называемым логарифмическим методом, т.е. в результате деления логарифмов индексов-факторов на логарифм результирующего индекса. Обсуждается и иллюстрируется для рассматриваемой задачи проблема возможной избыточности требований.

Ключевые слова. Аксиоматический метод исследования методов вычислительной математики, проблема выбора метода вычисления удельных весов факторов в мультипликативных индексных моделях.

Финансирование. Исследования выполнены при финансовой поддержке РФФИ проект № 19-07-00322 и в рамках проекта № гос. регистрации АААА-А19-119070190033-0, № МИНОБРНАУКИ 0279-2019-0003.

Информация о статье. Дата поступления: 11 февраля 2021 г.

V.I. Zorkaltsev
Limnological Institute, Siberian Branch of the Russian Academy of Sciences;
Baikal State University,
Irkutsk, Russian Federation

AN AXIOMATIC RESEARCH METHOD OF COMPUTATIONAL MATH'S ON THE EXAMPLE OF THE PROBLEM OF CHOOSING A METHOD FOR CALCULATING THE SPECIFIC WEIGHT OF FACTORS IN MULTIPLICATIVE INDEX MODELS)

Abstract. The study provides a general scheme of comparative analysis and selection of methods for solving problems of applied mathematics based on the axiomatic approach. This approach is based on the representation of computational methods in the form of mapping the initial data into the desired results.

A priori, a wide class of such mappings is introduced, which certainly contains all known and potentially possible methods for solving this problem. Then the authors formulated substantively necessary and mathematically strict requirements for these mappings, i.e. the properties of methods and models that should be used to solve it.

On the basis of theoretical studies, we determined the mappings that satisfy all the introduced requirements, or establish the absence of a method that satisfies all of them, which means the inconsistency of the requirements. The author explored the problem of choosing methods for calculating the specific weights of economic indexes-factors in the resulting index, which is the product of indexes-factors. In this case, the initial set of computational methods consists of mappings n-dimensional vectors with positive components (sets of initial factor indices, where n their number is) to n-dimensional vectors with all positive coefficients, the components of which mean the calculated share of each of the factor indices in their product.

The author discusses and formulates the system of requirements for the methods for calculating the specific weights of index-factors. A theorem is put forward according to which all these requirements are fulfilled if and only if the specific weights are calculated by the so-called logarithmic method, i.e. as a result of dividing the logarithm of the index-factors by the logarithm of the resulting index. The article considers the problem of possible redundancy of requirements.

Keywords. An axiomatic research method of computational mathematics, the problem of choosing a method for calculating the specific weights of factors in multiplicative index models.

Funding. The research was carried out with the financial support of the RFBR project No. 19-07-00322 and within the framework of the project No. state. registration AAAA-A19-119070190033-0, number MINOBRNAUKI 0279-2019-0003.

Article info. Received 11 February 2021.

Нередко для реализации содержательно одних и тех же целей используется несколько конкурирующих математических моделей и методов вычислений. Причем эти модели и методы могут приводить к существенно различающимся результатам. Обоснованный выбор используемого математического инструмента не всегда может быть осуществлен на основе аппарата математической статистики, в том числе и потому, что располагаемые данные могут быть уникальными и не могут рассматриваться как случайные выборки их множеств возможных реализаций с заданными законами распределения вероятности. Целесообразно развитие и использование других направлений в сравнительном анализе и выборе методов получения необходимых результатов из располагаемой информации, при выборе способов обработки первичных данных, способов оценки параметров аппроксимирующих зависимостей.

В качестве перспективного направления сравнительного анализа математических моделей и методов может рассматриваться аксиоматический подход. Аксиоматический метод исследования уже давно и успешно применяется в научных исследованиях. Впервые он появился в фундаментальной для формирования математики и других отраслей науки книге «Начала» Евклида [1]. Эта книга, написанная в 3 веке до нашей эры, известна как минимум в двух аспектах.

Во-первых, она содержала подробное и глубокое изложение геометрии. Во всем мире школьное изучение геометрии в течение многих веков вплоть до настоящего времени осуществлялось и осуществляется либо непосредственно на «Началах» Евклида, либо по учебникам написанными на базе этих «Начал». По количеству изданий в разных странах и переводов «Начала» Евклида занимают, очевидно, если не первое, то одно из первых место среди научных книг. В конце издания [там же] приводится «Список Начал Евклида вышедших с 1482 по 1880 год» который содержит 393 изданий. Причем этот список явно неполный. Имеются издания не учтенные составителем [там же] М.Е. Ващенко-Захарченко. В частности, в Списке отсутствуют издания на арабском и китайском языках о которых составителю [там же] хорошо было известно. Длительное время с VII по XV в. греческие научные труды сохранялись только благодаря их переводам на арабский язык. Сам составитель М.Е. Ващенко-Захарченко в предисловии к [там же] написал, что его список изданных за указанный период «Начал» содержит 460 изданий. В публикации [там же] не содержатся издания после 1861 г., в том числе и сама книгу [там же], изданная в 1880 г.

Конечно, книга Евклида не могла содержать абсолютно все факты геометрии. Она охватывала знания по геометрии, известные к этому времени греческим ученым. Это очень солидный состав фактов, существенно превосходящий наборы теорем, изучаемых в школе. Хотя остались интересные теоремы, не вошедшие в книгу Евклида. Примером может служить теорема Наполеона [2], согласно которой центры равносторонних треугольников, построенных на сторонах любого треугольника (только во вне, либо только во внутрь исходного треугольника) всегда составляют равносторонний треугольник. Наверное, человечеству было бы гораздо больше пользы, если бы Наполеон Бонапарт продолжил заниматься математикой или, если бы он попал в научную экспедицию Лаперуза, куда его, к сожалению, не взяли. Можно уверенно предположить, что имея Наполеона Бонапарта в своем составе, эта экспедиция сделала бы больше славных открытий (в том числе открыла бы и татарский пролив) и не пропала бы бесследно.

Во-вторых, Начала Евклида сыграли огромную роль в развитии науки использованной манерой изложения материала, как первый опыт аксиоматического построения теорий. В начале книги Евклид вводит определения исходных понятий: точка, линия, угол, окружность и др. Некоторые их этих определений звучат вполне по-современному. Например, определение точки: «это то часть чего есть ничто». То есть точка это нечто существующее и не делимое, в отличии от прямой линии, окружности, состоящих из множества точек. Затем вводит ряд очевидных утверждений о соотношениях исходных объектов, которые он назвал аксиомами и постулатами. До сих пор нет общего понимания, чем различаются аксиомы и постулаты. То и другое исходные, априорные утверждения, приводимые без доказательств. Затем Евклид, последовательно сначала только из введенных им аксиом и постулатов выводит другие утверждения о свойствах и соотношениях, рассматриваемых им геометрических тел. По ходу изложения он вводит новые объекты и определения, а также новые утверждения, которые доказывает, опираясь на введенные аксиомы и постулаты, а также на доказанные ранее утверждения. Тем самым он избегает возможностей появления «порочного круга», когда какое-то высказывание «A» доказывается с использованием высказывания «B», а высказывание «B» доказывается с использованием высказывания «A». В настоящее время не только геометрия, но и все другие разделы математики излагаются на основе аксиоматического метода. Предприняты даже попытки описать таким образом все здание современной математики.

Аксиоматический метод применяется и в других науках. Не случайно созданное И. Ньютоном описание механизма физического мира было реализовано в книге с названием «Начала натурфилософии». Три закона механики Ньютона и его же закон всемирного тяготения выполняют роль аксиом или постулатов физического мира Ньютона. Сам аксиоматический метод послужил импульсом создания новой отрасли знаний — математической логики.

В данной статье, на основе некоторого накопленного автором опыта использования аксиоматического подхода при сравнительном анализе методов прикладной математики, дается краткое описание некоторых основополагающих идей этого подхода. Примеры, как известно, порой бывают не менее поучительны чем правила. Изложение идей аксиоматического подхода в сравнительном анализе вычислительных методов в данной статье будет осуществляться на примере задачи вычисления удельных весов индексов-факторов в мультипликативных индексных моделях. Здесь будут приводиться без доказательств факты, доказанные в [3; 4].

Общая схема использования аксиоматического подхода при сопоставлении и выборе методов обработки данных

Вычислительные методы, используемые для решения данной задачи, в самом общем виде можно представлять, как некоторое отображение исходных данных в результаты расчетов. Обозначим X — множество возможных значений исходных данных, Y — множество возможных значений искомых результатов расчетов, Q — множество отображений исходных данных в результаты расчетов, содержащее возможные методы расчета. Все три множества должны максимально широко представлять используемые исходные данные, результаты и методы расчетов (имеющиеся, известные к данному моменту, и потенциально возможные).

В рассматриваемой далее задаче множества исходных данных и множества результатов расчетов состоят из n-мерных векторов со всеми положительными компонентами. В качестве отображений, содержащих все известные и потенциально возможные методы расчета, априори рассматриваются все отображения n-мерных векторов с положительными компонентами в n-мерные вектора с положительными компонентами.

Метод расчета представляется как некоторое отображение $F \in Q$ набора исходных данных $x \in X$ в значение результирующего показателя $y = F(x)$, $y \in Y$. Обозначим $i = 1, ..., m$ номера вводимых требований к методам расчета. Каждое вводимое требование порождает из исходного множества отображений Q два подмножества — отображения удовлетворяющие этому требованию и отображения не удовлетворяющие этому требованию. Подмножество отображений, удовлетворяющих требованию i, обозначим R_i, подмножество отображений, не удовлетворяющих требованию i, обозначим G_i. Они образуют разбиение исходного множества отображений

$$R_i \cup G_i = Q, R_i \cap G_i = \varnothing.$$

Множества отображений, удовлетворяющих всем введенным требованиям и не удовлетворяющее хотя бы одному из введенных требований обозначим

$$R = \bigcap_{i=1}^{n} R_i\,,\; G = \bigcup_{i=1}^{n} G_i\,.$$

Эти множества образуют разбиение исходного множества отображений:

$$R \cup G = Q,\ R \cap G = \varnothing.$$

В результате исследований требований могут возникать разные варианты. Может оказаться, что множество R пусто. То есть требования противоречивые. Такая ситуация означает, что удовлетворительного во всех отношениях метода решения данной задачи нет и не может быть. В таком случае надо либо объявить данную задачу неразрешимой, либо попытаться ослабить какие-то требования с тем, чтобы после этого система требований перестала быть противоречивой. Далее, в следующей статье, на примере задач выбора методов агрегирования экономических субъектов и экономических показателей будет подробно рассмотрен и обсужден этот случай противоречивости требований к методам.

Если R не пусто, то возможны два ситуации. Может оказаться так, что это множество состоит только из отображений явно неудовлетворяющих на роль методов решения. Исходное множество отображений может быть задано очень широким, включающим отображения явно неподходящие на роль методов решения рассматриваемой задачи. И может оказаться так, что только такие отображения останутся в R.

Наконец, возможна ситуация, когда множество R содержит отображения, которые вполне годятся на роль методов решения рассматриваемой задачи. Именно эти отображения и должны быть рекомендованы для использования, коль скоро считаем необходимым выполнение введенных требований. Идеальная ситуация, когда окажется, что множество R состоит только из одного отображения. Именно такой случай будет в рассматриваемой далее в данной статье задаче.

Задача вычисления удельного веса индексных факторов в мультипликативных индексных моделях

При описании экономических процессов широко используются соотношения вида

$$y = \prod_{i=1}^{n} x_i\,, \tag{1}$$

где y — результирующая переменная, x_i — индексы-факторы с номерами $i = \overline{1,n}$. Индексами здесь называются темпы роста экономических параметров. Все величины y и x_i, $i = 1, ..., n$ положительные.

В целях компактного изложения статистического материала, либо популяризации проводимых сведений нередко возникает потребность в наглядном представлении роли отдельных факторов в формировании результирующего индекса в долях или в процентном выражении.

В качестве примеров прежде всего следует назвать задачи выявления роли экстенсивных и интенсивных факторов в развитии производства. Темпы роста продукции народного хозяйства (совокупный общественный продукт, национальный доход) или его подразделений выражаются в виде произведений темпов роста объемов используемых ресурсов и их отдач. Пусть Q_t означает объем производства в году t, L_t — численность работающих, F_t — производственные фонды. Через $P_t = Q_t / L_t$, $R_t = Q_t / F_t$ обозначим производительность труда и фондоотдачу. Готовые темпы роста этих параметров составляют величины

$$q_t = \frac{Q_t}{Q_{t-1}},\ l_t = \frac{L_t}{L_{t-1}},\ f_t = \frac{F_t}{F_{t-1}},\ p_t = \frac{P_t}{P_{t-1}}\ \ r_t = \frac{R_t}{R_{t-1}}.$$

Получаем две часто применяемые в экономическом анализе модели разложение индекса объема производства на произведение индексов: численности работающих и производительности труда,

$$q_t = l_t \cdot r_t; \tag{2}$$

объёма используемых фондов и фондоотдачи,

$$q_t = f_t \cdot r_t. \tag{3}$$

Такого же типа модели задают соотношения между индексами: объема производства, потребленной энергии и энергоотдачи (величина, обратная энергоемкости продукции); валового сбора урожая, посевных площадей и урожайности.

Следует отметить, что рассматриваемая задача тесно связана с задачей оценки величины прироста производства за счет каждого из факторов. В планах и отчетах часто используются как показатель удельного веса роста производительности труда в показателе темпа роста производства, так и показатель абсолютной величины прироста производства за счет роста производительности труда. Многие из известных методов решения одной задачи имеют метод-аналог для решения другой. Вместе с тем есть определенные основания считать, что разложение прироста и темпов роста по факторам — разные задачи.

Примерами других моделей вида (1), где так же полезно было бы располагать обоснованной методикой вычисления удельного веса факторов, могут служить соотношения индексов: объёма перевозок (в тонно-километрах), веса перевозимых грузов и средней дальности перевозок; текущих издержек, объёма выпуска и себестоимости единицы продукции. При анализе индекса производительность труда часто используется его представление в виде произведения индексов фондовооруженности работающих и фондоотдачи:

$$p_t = v_t \cdot r_t, \tag{4}$$

где $v_t = V_t / V_{t-1}$– темп роста фондовооруженности, определяемой для t-го периода величиной $V_t = F_t / L_t$.

От соотношений (2), (4) можно перейти к трехфакторной модели

$$q_t = l_t \cdot v_t \cdot r_t. \tag{5}$$

Иногда используются модели с десятью и большим количеством индекс-факторов. Чем больший набор индексов рассматривается, тем полезнее, в целях повышения наглядности, приводить оценки их долевого участия в формировании результирующего индекса.

Методы вычисления вклада факторов

Для определения удельного веса факторов мультипликативных индексных моделей к настоящему времени предложено несколько методов. Некоторые экономисты предлагают это делать путем деления темпов прироста параметров-факторов на темп прироста результирующего параметра [5; 6]. Удельные веса факторов модели (1) в этом случае равны величинам

$$a_i = (x_i - 1) / (y - 1),\ i = \overline{1,n}. \tag{6}$$

Это простой в вычислительном отношении и легко интерпретируемый метод. Но при его применении неизбежны трудности, в частности, из-за того, что сумма удельных весов всех факторов здесь может отличаться от единицы.

Пусть численность работающих и производительность труда возросли в полтора раза, $l = p = 1{,}5$. Этому соответствует рост производства в 2,25 раза, $q = l \cdot p = (1{,}5)^2$. Тогда удельные веса обоих факторов равна 40 %, $a_1 = a_2 = 0{,}5 / 1{,}25 = 0{,}4$. Таким образом, только 80 % прироста производства будут объясняться как результат возрастания численности работающих и производительности труда. Остальные 20 % приходятся на долю неразложенного по факторам остатка. Обозначим его

$$\alpha_0 = 1 - \sum_{i=1}^{n} \alpha_i .$$

Различия в способах интерпретации и распределении по факторам этого остаточного члена и составляют в основном предмет дискуссий по поводу выбора метода для вычисления удельных весов факторов. Иногда остаточный член рассматривается как величина, имеющая самостоятельное смысловое значение. Такой путь исследований по модели (4) избрали американские статистики Д.Р. Норсуорти и Л.Д. Фалко [7], полагая, что остаточный член является составляющей, отражающей сложное взаимодействие факторов в отличие от их «чистого» вклада, измеряемого показателями a_i. Имеются также предложения распределять остаточный член между факторами поровну либо пропорционально «чистому» вкладу, либо по другим правилам [8–11]. В первых двух случаях удельные веса факторов будут соответствовать величинам

$$\beta_i = \alpha_i + \frac{1}{n}\alpha_0,\ \gamma_i = \alpha_i / \sum_{j=1}^{n} \alpha_j,\ i = \overline{1,n}. \tag{7}$$

Широко распространена точка зрения о необходимости причисления всего остатка в двухфакторных моделях к действую одного фактора, а именно к качественному [12]. В числовом примере таковым служит индекс производительности труда: на 40 % рост производства по-прежнему будет объясняться ростом численности работающих, а оставшиеся 60 % приходятся на долю роста производительности труда. Такой метод, применительно к определению вклада прироста производства за счет роста производительности труда, было рекомендован в советское время в методических указаниях по разработке планов народного хозяйства [13]. Имеются его обобщения для произвольного количества индексов-факторов. При предположении, что факторы упорядочены по степени их «качественности», предполагалось [12] использовать следующее правило вычисления удельных весов:

$$\delta_1 = \alpha_1;\ \delta_i = \left(1 - \sum_{j=1}^{i-1} \delta_j\right) \cdot \left(x_i - 1\right) / \left(\prod_{j=i}^{n} x_j - 1\right),\ i = \overline{2,n}. \tag{8}$$

Любопытный подход к задаче разложения по факторам абсолютного прироста предлагался болгарскими статистиками [14]. Они считают, что способ распределения остаточного члена не должен быть фиксирован, а должен выбираться исходя из содержательного анализа изучаемых процессов. В некоторых работах [15; 16] для задания методов разложения абсолютного прироста применяется аппарат вариационного исчисления, допускающий при конкретной реализации варианты. Это может рассматриваться как «методическая основа» для указанного выше «гибкого» подхода к выбору метода.

Не имея возможности рассмотреть все предложенные методы, а также использовавшуюся при их обосновании и критике аргументацию, отметить только сам факт существования различных точек зрения. Причем, расхождения в результатах вычислений по разным методам могут быть весьма значительны: в рассмотренном примере они достигали 10–20 %.

Интуитивное обоснование логарифмического метода

Когда темпы близки к единице (к 100 %) и число факторов невелико, все рассмотренные и другие известные методы дают мало различающиеся результаты. Учитывая это, некоторые исследователи предпочитают пользоваться индексами, усредненными на более короткие периоды. Например, вместо пятилетних темпов роста используют среднегодовые за пятилетие. Если среднегодовые индексы не приводят к желательному результату, можно рекомендовать перейти к усреднению на еще более короткие периоды — к среднеквартальным либо к среднемесячным индексам.

Чтобы вычислить средний темп роста за период, в k раз более короткий, как известно, необходимо вычислить корень k-ой степени из исходных индексов. Так, если величина x характеризует темп роста какого-то параметра за пять лет, то среднегодовой темп роста равен $x^{\frac{1}{5}}$. Обозначим через $h = \dfrac{1}{k}$ отношение продолжительности периода усреднения к продолжительности исходного периода. Значения удельных весов факторов, вычисляемые первым из рассмотренных методов на основе усредненных индексов, соответствуют величинам

$$\alpha_i(h) = \left((x_i)^h - 1 \right) / \left((y)^h - 1 \right), \; i = \overline{1,n}. \tag{9}$$

Остаточный член обозначим

$$\alpha_0(h) = 1 - \sum_{i=1}^{n} \alpha_i(h).$$

Используя стандартную технику исследования пределов, можно доказать, что

$$\lim_{h \to 0} \alpha_0(h) = 0.$$

То есть при уменьшении периода, для которого рассчитываются усредненные индексы, доля остаточного члена сокращается и в пределе сходится к нулю. Поэтому всегда можно подобрать такой период усреднения, что остаточный член будет меньше любой наперед заданной малой величины. Например, можно потребовать, чтобы он не превосходил требуемой точности вычисления величин a_i. Тогда проблемы интерпретации или распределения остатка автоматически отпадают.

Операция усреднения не только сокращает остаточный член, но и сближает результаты расчетов удельного веса факторов различными методами. Пусть за пятилетие численность работающих выросла на 30 %, а производительность их труда на 50 % (x_1 = 1,3; x_2 = 1,5). Этому соответствует прирост производства на 95 %. Результат вычисления вклада роста производительности труда в индекс объёма производства будет варьироваться в диапазоне от 52,6 % до 67,4 %: α_2 = 0,526; β_2 = 0,605; γ_2 = 0,625; δ_2 = 0,674. Если при расчетах исходить из среднегодовых темпов роста (для численности работающих и производительности труда они составят 105,4 % и 108,4 %), то расхождения в расчетах не будут превышать 3,5 %. В этом случае α_2 = 0,587; β_2 = 0,604; γ_2 = 0,608; δ_2 = 0,622. Для того, чтобы расхождения в оценках удельных весов составили менее 1 %, можно перейти к расчетам по среднеквартальным темпам роста.

Этот пример не только иллюстрирует эффективный способ улучшения метод, но и содержит критическое замечание к каждому из них. Здесь для любого из четырех методов расчеты по пятилетним и среднегодовым индексам привели к различным результатам. Это не может не показаться странным, также как странно было бы, если бы доля металлургических заводов в выплавке чугуна в стране зависела от того, измеряется ли продукция в тоннах или килограммах.

От проблемы остаточного члена и от влияния на результаты операции усреднения индексов избавлен логарифмический метод [16], согласно которому удельные веса факторов в модели (1) составляют величины

$$\rho_i = \log x_i / \log y,\ i = \overline{1,n}.$$

Поскольку $\log \prod_{i=1}^{n} x_i = \sum_{i=1}^{n} \log x_i$, то сумма величин ρ_i равна единице. Из общеизвестного правила $\log x^h = h \cdot \log x$ получаем, что расчеты с усредненными индексами здесь приводят к тому же результату:

$$\log(x_i)^h / \log y^h = \rho_i,\ i = \overline{1,n}.$$

Результаты расчетов по другим методам, при использовании для их улучшения усредненных индексов, как это было показано на примере, сходятся к одинаковым величинам. Естественно предположить, что эти величины наиболее точно отражают удельные веса факторов. Оказывается, что логарифмический метод как раз и дает такие предельные для других методов величины. Можно доказать соотношения:

$$\lim_{h\to 0} \alpha_i(h) = \lim_{h\to 0} \beta_i(h) = \lim_{h\to 0} \gamma_i(h) = \lim_{h\to 0} \delta_i(h) = \rho_i,\ i = \overline{1,n}.$$

Здесь $\beta_i(h)$, $\gamma_i(h)$, $\delta_i(h)$ — вычисленные по формулам (6)–(8) показатели, с использованием усредненных индексов по аналогии с вычислением $\alpha_i(h)$ в формуле (9).

Итак, логарифмический метод обладает важными преимуществами по сравнению с другими рассмотренными здесь и служит как бы эталоном для них, к которому они приближаются при усреднении индексов. Является ли этот метод наилучшим?

Требования к методу

Представляется, что проблема выбора может значительно облегчиться введением строгих критериев для сопоставления, сформулированных в виде требований к «идеальному» методу. В таком случае проблема переносится из сферы обсуждения каждого конкретного метода (их может быть бесконечно много) в другую плоскость — обсуждения правомочности выдвинутых требований.

Любой метод вычисления удельных весов факторов в модели (1) абстрактно можно считать отображением исходных данных в значениях удельных весов. Требования к методу будут формулироваться в виде набора свойств, которым должны удовлетворять эти отображения. Будем считать эти отображения однозначными. Этим исключаются из рассмотрения «неопределенные» методы, требующие привлечения информации, не содержащейся в данных модели (1).

Результаты расчетов по трем из рассмотренных методов (показатели β, γ, δ) зависят не только от результирующего индекса и рассматриваемого индекс-фактора, но и от распределения остальных индекс-факторов, а для показателя δ — и от порядка нумерации факторов. Чтобы охватить наиболее общий случай, удельный вес i-го фактора будем рассматривать в виде функции $f_i^n(x)$, зависящей от номера фактора, общего количества факторов и значений всех индекс-факторов. Здесь $x \in E^n$– вектор с компонентами x_i, $i = \overline{1, n}$. Результирующий индекс y в качестве аргумента функции f не фигурирует, поскольку он однозначно предопределяется значениями компонентов вектора x.

Будем считать, что функции $f_i^n(x)$ определены для векторов $x \in E^n$ с положительными компонентами и таких, что $\prod_{i=1}^{n} x_i \neq 1$. Случай $y = 1$ означает, что индексы-факторы взаимопоглощаются. Тогда нет смысла в вычисление удельных весов факторов. Заметим, что все рассмотренные выше методы в этом случае не позволяют производить вычисления. Через $x(h)$ обозначим вектор с компонентами $x_i(h) = (x_i)^h$, то есть состоящий из индексов-факторов, усредненных на период, в $1 / h$ раз более короткий, чем исходный.

Для мультипликативных индексных моделей применимы операции агрегирования и дезагрегирования факторов. Нередко произведение части индексов-факторов дает индекс, имеющий самостоятельное смысловое значение, который, с одной стороны, можно рассматривать как результирующий индекс для этой группы факторов, а, с другой стороны, можно использовать как индекс-фактор в агрегированной модели. Такую роль имеет индекс производительности труда при переходе от модели (5) к модели (2) путем агрегирования индексов фондовооруженности и фондоотдачи.

Пусть в модели (1) производится агрегирование *m* факторов с номерами $i = \overline{j+1, j+m}$. Выделим их в вектор $\hat{x} \in E^m$ с компонентами $\hat{x}_l = x_{j+l}$, $l = \overline{1,m}$. Согласно введенным ранее обозначениям, удельные веса этих факторов в обобщающем их индексе $\hat{y} = \prod_{l=1}^{m} \hat{x}_l$ соответствуют величинам $f_l^m(\hat{x})$. Будем считать, что совокупность факторов, получаемая после агрегирования, образует вектор $\breve{x}_i \in E^{n-m+1}$. Он имеет компоненты:

$$i = \overline{1, j},\ i = \overline{1, j};\ \breve{x}_{j+1} = \hat{y};\ \breve{x}_i = x_{i+m-1},\ i = \overline{j+2, n-m+1}.$$

Удельные веса факторов в агрегированной модели соответствуют величинам $f_i^{n-m+1}(\breve{x})$.

Представляется целесообразным требовать от функции *f* выполнения следующих свойств.

1. Сумма удельных весов всех факторов должна равняться единице:

$$\sum_{i=1}^{n} f_i^n(x) = 1.$$

Этим мы констатируем, что удельные веса измеряются в долевом выражении, и из этих долей должно складываться полное объяснение результирующего индекса.

2. Фактор, не влияющий на числовое значение результирующего индекса, должен иметь нулевой удельный вес:

$$\text{если } x_i = 1, \text{ то } f_i^n(x) = 0.$$

3. Фактор совпадающий численно с результирующим индексом должен иметь удельный вес равный единице:

$$\text{если } x_i = y, \text{ то } f_i^n(x) = 1.$$

Например, если рост производства происходит без изменений численности работающих, т.е. индекс численности равен единице и индекс производительности труда равен индексу объема производства, то мы вправе ожидать объяснения всего прироста производства только как результата роста производительности труда и считать вклад индекса численности работающих нулевым.

4. Удельный вес агрегированного фактора должен быть равен сумме удельных весов, участвовавших в этом агрегировании индексов-факторов:

$$f_{j+1}^{n-m+1}(\breve{x}) = \sum_{i=j+1}^{j+m} f_i^n(x).$$

Логично ожидать, что сумма вкладов индексов фондовооруженности и фондоотдачи, рассчитываемых по модели (5), будет равна вкладу индекса производительности труда, рассчитываемого по модели (2).

5. Операция агрегирования не должна влиять на величину удельного веса факторов, в агрегировании не участвующих:

$$f_i^n(x) = f_i^{n-m+1}(\breve{x}),\ i = \overline{1, j};\ f_i^n(x) = f_{i+m-1}^{n-m+1}(\breve{x}),\ i = \overline{j+2, n-m+1}.$$

Эта операция не меняет существа анализируемых процессов, и было бы странно, если от использования или неиспользования ее зависели бы удельные веса индексов-факторов, которых она не касается.

6. Произведение удельного веса исходного индекса-фактора в агрегирующем его индексе на удельный вес агрегирующего индекса должно равняться удельному весу исходного индекса-фактора:

$$f_l^m(\hat{x}) \cdot f_{j+1}^{n-m+1}(\breve{x}) = f_{j+l}^n(x),\ l = \overline{1, m}.$$

Так, согласно формулам (2), (4), (5) произведение удельного веса индекса фондоотдачи в индексе производительности труда на удельный вес индекса производительности труда в индексе объема производства должно совпасть с удельным весом индекса фондоотдачи в индексе объема производства. Здесь полная аналогия с вычислением удельных весов аддитивно сочетающихся факторов. Например, удельный вес предприятия в продукции отрасли равен произведению удельного веса предприятия в объединении предприятий на удельный вес объединения в отрасли, если объемы производства по объединению и отрасли определяются суммированием объемов выпуска продукции входящих в них предприятий.

7. Расчеты по усредненным данным на более короткие периоды индексам должны приводить к тем же результатам:

$$f_i^n(x(h)) = f_i^n(x),\ i = \overline{1, n}.$$

8. Малые изменения исходных данных, например, из-за неизбежных погрешностей округления при расчетах, должны приводить к малым изменениям результатов, т.е. функции f_i^n должны быть непрерывными: для любого $\bar{x} \in E^n$, такого, что $\prod_{i=1}^{n} \bar{x}_i \neq 1$, $\bar{x}_i > 0$, $i = \overline{1, n}$,

$$\lim_{x \to \bar{x}} f_i^n(x) = f_i^n(\bar{x}),\ i = \overline{1, n}.$$

Вероятно, можно сформулировать и другие столь же естественные требования, но оказывается, что приведенных достаточно, чтобы однозначно выбрать наиболее подходящий метод.

Результаты сопоставления

Теорема. *Все сформулированные в предыдущем разделе требования 1–8 выполняются в том и только в том случае, если для вычисления удельных весов индексов-факторов в мультипликативной индексной модели (1) используется логарифмического метод, т.е. тогда и только тогда, когда*

$$f_i^n(x) = \log(x_i) / \log\left(\prod_{i=1}^{n} x_i\right).$$

Доказательство этой теоремы имеется в [3; 4]. Тот факт, что логарифмический метод удовлетворяет всем требованиям, проверяется непосредственно подстановкой. Попутно устанавливается непротиворечивость введенных требований: существуют отображения, им все удовлетворяющие. Как доказано в [3; 4] логарифмический метод — это единственный метод, удовлетворяющий всем введенным требованиям.

Набор требований избыточен. Можно, например, доказать, что требования 1,2 следует из требований 3,4; требование 3 — из требований 1, 2, 4; требование 4 — из требований 1,5; требование 5 — из требований 4, 6. Поэтому доказанное утверждение будет справедливо, если вместо первых пяти требований использовать только требования 3, 4, либо только требования 1 ,2, 4, либо 1, 3, 5. Можно также доказать, что требование 6 будет выполнено, если выполнены первые пять требований, а требование 7 является следствием из всех остальных требований. Наконец, требование 8 может стать лишним, если ограничить область определения функции f только рациональными значениями величин x_i.

Итак, если все требования или даже часть из них в указанных наборах представляются правильными, то следует согласиться с необходимостью использования только логарифмического метода. Использование какого-либо другого метода априори означает отказ от соблюдения некоторых рассмотренных в прошлом разделе свойств.

Результаты сопоставления всех рассмотренных в статье методов с требованиями приведены в табл. Здесь знак «плюс» озна-

Результаты проверки выполнения требований для различных методов вычисления удельных весов факторов

Вычисляемый показатель	Номер требования							
	1	2	3	4	5	6	7	8
α	–	+	+	–	–	+	–	+
β	+	–	–	–	–	–	–	+
γ	+	+	–	–	–	–	–	+
δ	+	+	–	–	–	–	–	+
ρ	+	+	+	+	+	+	+	+

чает, что данный метод удовлетворяет, а знак «минус», что этот метод не удовлетворяет требованию. Чтобы доказать, что метод удовлетворяет требованию, следует это проверить подстановкой аналитического выражения схемы вычислений в математическую формулировку требования. Для доказательства обратного достаточно построить числовой пример, в котором при использовании данного метода нарушается рассматриваемое требование.

Заключение

В данной статье представлена общая концепция сравнительного анализа методов решения кокой-либо задачи прикладной математики на базе аксиоматического подхода. Этот подход основывается на двух идеях.

1. Представление всего множества возможных методов решения данной задачи в виде отображения исходных данных в искомые результаты. Необходимо, что бы были четко определены три множества: множество исходных данных, множество искомых результатов, и, наконец, рассматриваемое множество отображений исходных данных в результаты расчетов. Важно, чтобы все эти три множества были представлены априори в самом общем виде, содержащем все известные и потенциально возможные методы решения данной задачи.
2. Четкие формулировки желаемых свойств методов. Эти свойства должны иметь вид содержательно необходимых, математически строго формулируемых требования к рассматриваемым отображениям.

На основе математических доказательств могут быть выявлены подмножества отображений, удовлетворяющих всем введенным требованиям. В данной статье эта общая схема была достаточно подробно проиллюстрирована на примере задачи выбора метода вычисления удельных весов факторов в мультипликативных индексных моделях. Применение аксиоматического подхода в данном случае позволило прийти к единственному методу. Все рассматриваемые требования выполняются в том и только в том случае, если для решения указанной задачи применяется логарифмический метод. При этом было показано, что набор рассматриваемых требований избыточен, некоторые из требований могут быть получены как следствия из других требования. Выявлены минимальные наборы требований, из которых вытекают все остальные введенные здесь. Если согласится, что требования какого-либо из минимальных наборов обязательно должны выполняться, то тем самым необходимо признать, что должен использоваться для решения рассматриваемой задачи только логарифмический метод.

В результате аксиоматического анализа методов решения данной задачи могут быть получены и другие результаты, в том числе доказательство противоречивости введенных требований. Такие ситуации планируется рассмотреть в последующих статьях, посвященных применению аксиоматического подхода к выбору методов декомпозиции на составляющие временных рядов и методов агрегирования экономических данных.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Евклид Начала / предисл., пояснительное введ. и доп. М.Е. Ващенко-Захарченко. — Москва : ЛЕНАНД, 2000. — 752 с.

2. Математика. Информатика : энциклопедия / гл. ред. А.П. Горкин. — Москва : Росмэн-пресс, 2007. — 544 с.

3. Зоркальцев В.И. Разложение темпов роста по факторам / В.И. Зоркальцев. — Сыктывкар : Коми филиал АН СССР, 1985. — 21 с.

4. Зоркальцев В.И. Аксиоматический анализ методов вычисления удельного веса индексов-факторов в их произведении / В.И. Зоркальцев // Экономика и математические методы. — 1996. — Т. 32, № 2. — С. 138–147.

5. Анчишкин И.А. Прогнозирование роста социалистической экономики / И.А. Анчишкин. — Москва : Экономика, 1973. — 294 с.

6. Экономика промышленности СССР / под ред. Б.М. Левина. — Москва : Высшая школа, 1977. — 526 с.

7. Норсуорти Д.Р. Анализ изменений производительности труда в крупных секторах промышленности США / Д.Р. Норсуорти, Л.Д. Фалко. — Москва : Экономика, 1974.

8. Кац М.И. К вопросу о влиянии отдельных факторов на результат хозяйственной деятельности / М.И. Кац // Научные записки Харьковского института советской торговли. — 1954. — Вып. 1. — С. 99–110.

9. Реусс Г. Анализ производительности: Экономическая основа и статистическая теория / Г. Реусс. — Москва : Изд-во иностр. лит., 1963. — 251 с.

10. Струмилин С.Г. К анализу совокупного действия нескольких факторов / С.Г. Струмилин // Ученые записки по статистике. — Москва : Изд-во АН СССР, 1957. — Т. 3 : Вопросы баланса народного хозяйства и производительности труда. — С. 377–383.

11. Югенбург С.М. К вопросу о разложении абсолютного прироста по факторам / С.М. Югенбург // Ученые записки по статистике. — Москва : Изд-во АН СССР, 1957. — Т. 3 : Вопросы баланса народного хозяйства и производительности труда. — С. 372–376.

12. Адамов В.Е. Факторный индексный анализ / В.Е. Адамов. — Москва : Статистика, 1977. — 199 с.

13. Методические указания к разработке государственного плана развития народного хозяйства / сост. К.А. Ефимов, Ф.А. Амирджанянц, Л.И. Максимов [и др.]. — Москва : Экономика, 1974. — 790 с

14. Цонев Б. Большие гибкости в теории анализа приростов / Б. Цонев, Б. Петров // Вестник статистики. — 1978. — № 11.

15. Липовицкий С.С. Вариационный анализ распределения прироста по факторам / С.С. Липовицкий // Экономика и математические методы. — 1983. — Т. 19, вып. 1. — С. 125–130.

16. Хумал А. Разделение прироста произведения / А. Хумал // Учебные записки по статистике / А. Хумал // Ученые записки по статистике. — Москва : Изд-во АН СССР, 1964. — Т. 8 : Статистические закономерности и методы. — С. 206–212.

REFERENCES

1. Vashchenko-Zakharchenko M.E. (ed.). Euclid *Nachala* [Principle]. Moscow, LENAND Publ., 2000. 752 p.

2. Gorkin A.P. (ed.). *Matematika. Informatika* [Mathematics. Informatics]. Moscow, Rosmen-press Publ., 2007. 544 p.

3. Zorkal'tsev V.I. *Razlozhenie tempov rosta po faktoram* [Decomposition of growth rates by factors]. Syktyvkar, Komi Branch of the USSR Academy of Sciences Publ., 1985. 21 p.

4. Zorkal'tsev V.I. Axiomatic analysis of methods for calculating the proportion of index-factors in their product. *Ekonomika i matematicheskie metody = Economics and Mathematical Methods,* 1996, vol. 32m no. 2, pp. 138–147. (In Russian).

5. Anchishkin I.A. *Prognozirovanie rosta sotsialisticheskoi ekonomiki* [Forecasting the Growth of Socialist Economy]. Moscow, Ekonomika Publ., 1973. 294 p.

6. Levin B.M. (ed.). *Ekonomika promyshlennosti SSSR* [Industrial Economy of the USSR]. Moscow, Higher School Publ., 1977. 526 p.

7. Norsworthy D.R., Falko L.D. *Analiz izmenenii proizvoditel'nosti truda v krupnykh sektorakh promyshlennosti SshA* [Analysis of Changes in Labor Productivity in Large USA Industrial Sectors]. Moscow, Ekonomika Publ., 1974.

8. Kats M.I. On the question of the influence of certain factors on the result of economic activity. *Nauchnye zapiski Khar'kovskogo instituta sovetskoi torgovli = Scientific Notes of the Kharkiv Institute of Soviet Trade,* 1954, iss. 1, pp. 99–110. (In Russian).

9. Reuss G. *Produktivitätsanalyse. Okonomische Grundlagen und statistische Methodik*. Basel, Kyklos-Verl. 1960. 199 S. (Russ. ed.: Reuss G. *Analiz proizvoditel'nosti: Ekonomicheskaya osnova i statisticheskaya teoriya.* Moscow, Inostrannaya Literatura Publ., 1960. 119 p.).

10. Strumilin S.G. On the analysis of the combined action of several factors. In *Uchenye zapiski po statistike* [Scientific Notes on Statistics]. Moscow, Akademiya nauk SSSR Publ., 1957, vol. 3, pp. 377–383. (In Russian).

11. Yugenburg S.M. On the question of the decomposition of the absolute growth by factors. In *Uchenye zapiski po statistike* [Scientific Notes on Statistics]. Moscow, Akademiya nauk SSSR Publ., 1957, vol. 3, pp. 372–376. (In Russian).

12. Adamov V.E. *Faktornyi indeksnyi analiz* [Factor Analysis Index]. Moscow, Statistika Publ., 1977. 199 p.

13. Efimov K.A., Amirdzhanyants F.A., Maksimov L.I. (eds). *Metodicheskie ukazaniya k razrabotke gosudarstvennogo plana razvitiya narodnogo khozyaistva* [Methodological Guidelines for the Development of the State Plan for the Development of the National Economy]. Moscow, Ekonomika Publ., 1974. 790 p.

14. Tsonev B., Petrov B. Greater flexibility in the theory of growth analysis. *Vestnik statistiki = Bulletin of Statistics,* 1978, no. 11. (In Russian).

15. Lipovitskii S.S. Variational Analysis of the Distribution of Growth by Factors. *Ekonomika i matematicheskie metody = Economics and Mathematical Methods,* 1983, vol. 19, iss. 1, pp. 125–130. (In Russian).

16. Khumal A. Division of the Product Increment. In *Uchenye zapiski po statistike* [Scientific Notes on Statistics]. Moscow, Akademiya nauk SSSR Publ., 1964, vol. 8, pp. 206–212. (In Russian).

ИНФОРМАЦИЯ ОБ АВТОРЕ

Зоркальцев Валерий Иванович — доктор технических наук, профессор, ведущий научный сотрудник лаборатории междисциплинарных эколого-экономических исследований и технологий, Лимнологический институт СО РАН; профконсультант, Байкальский государственный университет, г. Иркутск, Российская Федерация, vizork@ mail.ru.

INFORMATION ABOUT THE AUTHOR

Valeriy I. Zorkaltsev — Doctor of Technology, Professor, Leading Research Fellow, Laboratory of Interdisciplinary Ecology-Economy Research and Technology, Limnological Institute, Siberian Branch of the Russian Academy of Sciences; Professional Consultant, Baikal State University, Irkutsk, Russian Federation, vizork@ mail.ru.

ДЛЯ ЦИТИРОВАНИЯ

Зоркальцев В.И. Аксиоматический подход к исследованию методов прикладной математики (на примере задачи выбора способа вычисления удельного веса факторов в мультипликативных индексных моделях) / В.И. Зоркальцев // System Analysis & Mathematical Modeling. — 2021. — Т. 3, № 1. — С. 52–70.

FOR CITATION

Zorkaltsev V.I. An Axiomatic Research Method of Computational Math's on the Example of the Problem of Choosing a Method for Calculating the Specific Weight of Factors in Multiplicative Index Models). *System Analysis & Mathematical Modeling*, 2021, vol. 3, no. 1, pp. 52–70. (In Russian).